Matriz exponencial y ecuaciones diferenciales

Amaia Gil Lertxundi y Josué Tonelli Cueto

Por convenio, tomaremos $A^0 = \mathbb{I}_n$ sea A invertible o no y $0^0 = 1$.

1. Motivación diferencial de la exponencial

Cuando nos encontrábamos ante el problema lineal homogéneo de orden uno

$$x' = a(t)x$$

se tiene que la base de la solución general es dada por

$$\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right)$$

Y por ello la solución general es

$$x(t) = C\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right),\ C \in \mathbb{R}$$

Ahora, bien al plantearnos el sistema lineal de orden n

$$x' = A(t)x$$

Sabemos, que existe una matriz fundamental $X(t)$ para resolver el sistema, que verifica

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t)$$

Con lo que la solución general sería

$$X(t) \cdot C,\ C \in \mathbb{R}^n$$

Así, usando un símil con lo anterior podemos tener la tentación de escribir algo por el estilo,

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$$

Ahora, pensando en la exponencial como elevar a números reales lo anterior carece de sentido. Sin embargo, al pensar en la exponencial como una serie formal de potencias obtenemos una expresión

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

En la cual no hay problema alguno en sustituir la función matricial y operar, obteniendo

$$\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)^n}{n!}$$

Lo cual tiene sentido, siempre que en este proceso sigamos teniendo una serie convergente. De este modo, es necesario, fundamentar lo anterior para que tenga sentido.

Por otro lado, nos será útil demostrar unas cuantas desigualdades, así como mostrar métodos de cálculo para pasar de la serie formal de potencias a funciones matriciales concretas.

2. Convergencia de la serie

En general, el teorema de la exponencial de la matriz es el siguiente,

Teorema 1. *Dada una función matricial de clase C^1, $A:(a,b)\to\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, entonces se tiene que la serie*

$$\exp(A(t))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(t)^n}{n!}$$

converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado de (a,b). Ergo, la función $\exp(A(t))$ es de clase C^1 en (a,b). Además, por un lado, si $A(t)$ y $A'(t)$ conmutan se verifica que

$$\frac{d}{dt}\exp(A(t))=A'(t)\cdot\exp(A(t))$$

Y por otro lado,

$$\frac{d}{dt}\exp(A(t))=A'(t)\cdot\exp(A(t))=\exp(A(t))\cdot A'(t)$$

si y sólo si $A(t)$ y $A'(t)$ conmutan.

Así, dado que siempre podemos garantizar que $A(t)$ y $A'(t)$ conmutan, cuando $A(t)$ es de la forma A_0t, nos restringiremos a los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes; por lo cual probaremos una versión más débil y sencilla de enunciar. La cual, sin embargo, en su prueba usa las mismas ideas que la prueba del teorema general, por lo que no supone una pérdida conceptual. [1]

Teorema 2. *Dada una matriz $A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, entonces se tiene que la serie*

$$\exp(At)=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\frac{t^n}{n!}$$

converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Luego, la función $\exp(At)$ es diferenciable en toda la recta real, y además verifica que

$$\frac{d}{dt}\exp(At)=A\cdot\exp(At)=\exp(At)\cdot A$$

Para demostrar este teorema trabajaremos con normas matriciales, así nos será útil hacer un repaso de espacios normados y de ello demostrar el teorema anterior.

2.1. Espacios normados

Definición 1. *Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, se llama norma a cualquier función $|\ |:V\to\mathbb{R}$ verificando las siguientes condiciones*

1. *Positividad: Para cada $x\in V$, $|x|\geq 0$.*
2. *Homogeneidad: Para cada $x\in V$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda\cdot x|=|\lambda|\cdot|x|$.*
3. *Desigualdad triangular: Para cada $x,y\in V$, $|x+y|\leq|x|+|y|$*
4. *Unicidad del cero: Para cada $x\in V$; si $|x|=0$, entonces $x=0$.*

Al par $(V,|\ |)$ se le llama espacio normado.

Ejemplo 1. *Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, se tienen las llamadas p-normas para $p\geq 1$ dadas por*

$$||x||_p=\sqrt[p]{\sum_{i=0}^{n-1}|x_i|^p}$$

junto a la norma del máximo definida por

$$||x||_\infty=\max_{0\leq i\leq n-1}|x_i|$$

[1] Para ver la razón por la que $A(t)$ y $A'(t)$ deben conmutar, consultar [3].

Es bien conocido que una norma, nos define una métrica sobre el espacio vectorial que a su vez le da una topología, y nos permite hablar de convergencia con respecto a una norma u otra. En este aspecto, es fundamental, determinar cuando dos normas son equivalentes, para saber cuando podemos pasar de una a otra sin modificar convergencia. Así, la siguiente definición,

Definición 2. *Dadas dos normas $|\ |_0$ y $|\ |_1$ sobre un espacio vectorial V, se dice que son equivalentes cuando existen dos números positivos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\alpha \cdot |x|_0 \leq |x|_1 \leq \beta \cdot |x|_0$$

encierra la topología gracias al siguiente teorema que por simplicidad no probaremos, dado que no lo usaremos -evadiremos este resultado con una prueba más elemental-.

Teorema 3. *Dadas dos normas $|\ |_0$ y $|\ |_1$ sobre un espacio vectorial V, estas definen la misma topología sobre V –i.e. la misma convergencia– si y sólo si son equivalentes.*

Ahora, es interesante el siguiente teorema sobre espacios vectoriales reales de dimensión finita

Teorema 4. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, todas las normas sobre él son equivalentes.*

Demostración. Nos basta con trabajar en $\mathbb{R}^n$ por el teorema de representación de espacios vectoriales finitos, y demostrar que toda norma en él es quivalente a la norma

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}$$

Para ello, sea $|\ |$ una norma arbitraria sobre $\mathbb{R}^n$, hemos de probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ positivos, tales que

$$\alpha \cdot |x|_2 \leq |x| \leq \beta \cdot |x|_2$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, ahora es fácil ver que sólo basta probarlo para vectores no nulos, y a partir de ahí dividiendo por la norma de $|x|_2$ sólo para vectores unitarios respecto a la 2-norma. Así, para cada $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, hemos de mostrar que

$$\alpha \leq |x| \leq \beta$$

para unos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ positivos.

En primer lugar, $|\ |$ es continua respeto a la topología euclídea, dado que usando las propiedades de la norma se tiene

$$||x| - |y|| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{Des.}\\ \text{trian.}}} |x - y| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_i - y_i) \cdot e_i\right| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{Des.}\\ \text{trian.}}} \sum_{i=0}^{n-1} |(x_i - y_i) \cdot e_i| = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i - y_i| \cdot |e_i|$$

donde la continuidad del valor absoluto en la expresión final y la suma finita de expresiones continuas, nos da la continuidad de la norma $|\ |$ respecto a la topología euclídea.

En segundo lugar, al ser $|\ |$ continua, consideremos la función

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto |x| \end{aligned}$$

La cual alcanza su máximo y su mínimo por el teorema de Weierstrass y la compacidad de S^{n-1}. Así, sea α su mínimo y β su máximo tenemos

$$\alpha \leq |x| \leq \beta$$

Ahora, necesariamente $\alpha > 0$ dado que hay un $z \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que

$$\alpha = |z|$$

Y la norma de un vector se anula si y sólo si estamos ante el vector nulo.

El teorema está demostrado. $\square$

Ejemplo 2. *Este teorema no es cierto en general, así en $\mathbb{R}^n$ todas las p-normas definen la misma topología, pero no en los espacios de dimensión infinita. Por ejemplo, en ℓ^p cada p-norma define una topología distinta.*

El resultado anterior nos muestra que a la hora de la convergencia todas las normas son iguales, así nos basta con considerar solamente las normas que sean mejores para nuestros propositos cuando trabajemos en $\mathbb{R}^n$.

Con esto en mente, y considerando que $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, conjunto de las matrices reales cuadradas de orden n, es simplemente $\mathbb{R}^{n^2}$ nos basta considerar un tipo especial de norma.

Definición 3. *Dado el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, se llama norma matricial a cualquier norma de este espacio $|\,|$ tal que para cada $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, verifique que*

$$|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$$

Finalmente, demostremos que tales normas existen.

Teorema 5. *Dada una norma $|\,|$ sobre $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$||A|| = \max_{|x|=1} |A \cdot x|, \text{ para } A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

es una norma matricial sobre $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

Demostración. Verifiquemos primero las propiedades de la norma:

1. Positividad.

   Obvia, desde que consideramos el máximo de cantidades no negativas.

2. Homogeneidad.

   Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, se tiene

   $$||\lambda \cdot A|| = \max_{|x|=1} |\lambda \cdot A \cdot x| = |\lambda| \cdot \max_{|x|=1} |A \cdot x| = |\lambda| \cdot ||A||$$

3. Desigualdad triangular. Sean $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, se verifica

   $$||A+B|| = \max_{|x|=1} |(A+B) \cdot x| = \max_{|x|=1} |A \cdot x + B \cdot x| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{Des.}\\ \text{trian.}}}$$

   $$\leq \max_{|x|=1} (|A \cdot x| + |B \cdot x|) \leq \max_{|x|=1} |A \cdot x| + \max_{|x|=1} |B \cdot x| = ||A|| + ||B||$$

4. Unicidad del cero:

   Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, y

   $$||A|| = 0$$

   Se tiene que esto significa que para cada vector de la base canónica e_i se verifica

   $$|A \cdot e_i| = 0$$

   i.e.

   $$A \cdot e_i = 0$$

   Lo que nos da que A es la matriz nula, esto es,

   $$A = \mathbb{O}$$

Y veamos ahora que es matricial. Así, por la definión de la norma, es obvio que para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$|A \cdot x| \leq ||A|| \cdot |x|$$

De lo que, dadas $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ se verifica

$$||A \cdot B|| = \max_{|x|=1} |A \cdot B \cdot x| \leq ||A|| \cdot \max_{|x|=1} |B \cdot x| = ||A|| \cdot ||B||$$

como deseábamos mostrar. □

A partir de aquí, tenemos que las normas matriciales existen y por ello ya podemos usarlas.

2.2. Convergencia. Teoremas útiles.

Citemos dos teoremas de utilidad.

Teorema 6 (Criterio de Weierstrass). *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ una serie de funciones. Si para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe un M_n tal que $|f_n(t)| \leq M_n$ para $t \in [a,b]$ y $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniforme y absolutamente en $[a,b]$.*

Teorema 7. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ una serie de funciones diferenciables. Si en un intervalo $[a,b]$ se verifica lo siguiente*

1. *$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge en al menos un punto de $[a,b]$.*
2. *$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$*

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en (a,b) y se puede derivar término a término.

2.3. Demostración del teorema 2

Ya estamos en condiciones de dar una prueba del teorema 2. Sea $|| \, ||$ una norma matricial cualquiera, sabemos que es equivalente a la norma del máximo y así hay un $M > 0$ tal que para cada $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y todo $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$|a_{i,j}| \leq \max_{0 \leq i,j \leq n-1} |a_{i,j}| = |A|_\infty \leq M \cdot ||A||$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$|a_{i,j}^{(n)}| \leq \max_{0 \leq i,j \leq n-1} |a_{i,j}^{(n)}| = |A^n|_\infty \leq M \cdot ||A^n|| \leq M \cdot ||A||^n$$

sean cual sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y todo $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, donde $a_{i,j}^{(n)}$ son los coeficientes de A^n.

A partir de aquí, sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, al derivar término a término y formalmente la serie de la exponencial se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} A^n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot A^n \frac{t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} = A \cdot \exp(At) \end{aligned}$$

De lo que por el teorema 7 y la linealidad de A, se tiene que sólo hemos de probar que la serie exponencial converge uniformemente.

Para ello, observemos que para cada $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ y cada $t \in [a,b]$

$$|a_{i,j}^{(n)}| \frac{t^n}{n!} \leq M \cdot ||A||^n \cdot \frac{t^n}{n!} \leq M \cdot ||A||^n \cdot \frac{(\max\{|a|, |b|\})^n}{n!}$$

Y que

$$M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} ||A||^n \cdot \frac{(\max\{|a|, |b|\})^n}{n!}$$

converge –y en concreto a $M \cdot \exp(||A|| \cdot \max\{|a|, |b|\})$–, así por el teorema 6 se tiene la convergencia uniforme en $[a,b]$ y el teorema queda demostrado.

3. Resultados varios sobre la exponencial

Teorema 8. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $t, s \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes igualdades*

1. $\exp(A \cdot 0) = \mathbb{I}$
2. $\exp(A \cdot (s+t)) = \exp(A \cdot s) \cdot \exp(A \cdot t)$
3. $\exp((A+B) \cdot t) = \exp(A \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t)$, *si $A \cdot B = B \cdot A$.*

4. $\exp(A\cdot t)$ *es invertible y su inversa es* $\exp(-A\cdot t)$.

5. $\exp(r\cdot\mathbb{I}\cdot t) = e^{r\cdot t}\cdot\mathbb{I}$

Demostración. 1.

$$\exp(A\cdot 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{0^n}{n!} = \mathbb{I}$$

2.

$$\exp(A\cdot s)\cdot\exp(A\cdot t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{s^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}\right) =$$

Por la convergencia absoluta y la fórmla del producto de Cauchy

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k \frac{s^k}{k!}\cdot A^{n-k}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{s^k}{k!}\cdot\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s^k t^{n-k}\right) =$$

Que por la fórmula del binómio de Newton

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{(s+t)^n}{n!} = \exp(A(s+t))$$

3.

$$\exp(A\cdot t)\cdot\exp(B\cdot t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n \frac{t^n}{n!}\right) =$$

Por la convergencia absoluta y la fórmla del producto de Cauchy

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k \frac{t^k}{k!}\cdot B^{n-k}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\cdot\frac{B^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k B^{n-k}\right) =$$

Que por la fórmula del binómio de Newton, válida al conmutar A y B respecto al producto,

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(A+B)^n\frac{t^n}{n!} = \exp((A+B)\cdot t)$$

4. Claramente $A\cdot(-A) = (-A)\cdot A$, así por el punto anterior

$$\exp(A\cdot t)\cdot\exp(-A\cdot t) = \exp((A-A)\cdot t) = \exp(\mathbb{O}) = \mathbb{I}$$

De lo que $\exp(A\cdot t)$ es invertible y su inversa es la deseada.

5.

$$\exp(r\cdot\mathbb{I}\cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{I}^n\frac{r^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\right)\cdot\mathbb{I} = e^{r\cdot t}\cdot\mathbb{I}$$

$\square$

4. Cálculo de la exponecial de la matriz

A la hora de resolver un sistema, por lo general no queremos obtener como solución de

$$x' = Ax$$

una solución formal del tipo

$$x = \exp(At), \, C \in \mathbb{R}^m$$

La cual ciertamente no ayuda de ninguna forma a obtener valores concretos sobre los que calcular. Así, que aquí mostraremos dos método para determinar la exponencial de una matriz, y resover con ella el sistema.

Nos centraremos básicamente en dos métodos,

1. Método de la forma canónica de Jordan
2. Algoritmo de Putzer

Los cuales puede garantizarse que son efectivos si se realizan los cálculos con aritmética exacta. Sino, por lo general, hay otros métodos mejores -con menos errores–, aunque continúa siendo un problema abierto el poder calcular de forma eficiente la exponencial de una matriz cualquiera. (Para otros métodos consultar [4].)

4.1. Método de la forma canónica de Jordan

Un teorema fundamental a la hora de simplificar ciertos cálculos en álgebra lineal es el siguiente

Teorema 9 (Forma canónica de Jordan)**.** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, entonces existe una matriz $P \in GL_n(\mathbb{C})$, verificando*

$$A = PJ(A)P^{-1}$$

donde $J(A)$ es la forma canónica de Jordan, dada por

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} = diag(J_0, \ldots, J_r)$$

siendo para cada i,

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

un bloque básico de Jordan.

A partir de aquí, mostremos los diversos lemas, teoremas y colorarios que nos hacen el cálculo más sencillo.

Lema 10 (Primera reducción del cálculo.)**.** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tal que*

$$A = P^{-1}BP$$

para una matriz $B, P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ con P invertible. Entonces se verifica

$$\exp(At) = P^{-1} \cdot \exp(Bt) \cdot P$$

Demostración. Se verifica que

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (P^{-1}BP)^n \frac{t^n}{n!} = P^{-1} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n \frac{t^n}{n!} \right) \cdot P = P^{-1} \cdot \exp(Bt) \cdot P$$

dado que la conjugación por P invertible, $X \mapsto P^{-1}XP$, es un endomorfismo del anillo de matrices. $\square$

Lema 11 (Segunda reducción del cálculo.)**.** *Sea*

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} = diag(J_0, \dots, J_r)$$

la forma canónica de Jordan de una matriz. Se verifica que

$$\exp{(Jt)} = diag(\exp(J_0 t), \dots, \exp(J_r t))$$

Demostración. Como se tiene que

$$J^n = (\mathrm{diag}(J_0, \dots, J_r))^n = \mathrm{diag}(J_0^n, \dots, J_r^n)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \exp{(Jt)} &= \sum_{n=0}^{\infty} J^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{diag}(J_0, \dots, J_r))^n \frac{t^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{diag}(J_0^n, \dots, J_r^n) \frac{t^n}{n!} = \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_0^n \frac{t^n}{n!}, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} J_r^n \frac{t^n}{n!} \right) = \mathrm{diag}\left(\exp(J_0 t), \dots, \exp(J_r t)\right) \end{aligned}$$

□

Lema 12 (Exponencial de un bloque básico de Jordan)**.** *Sea*

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

un bloque básico de Jordan de orden k, entonces

$$\exp(J_\lambda t) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & 1 & \dots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Tomemos

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & \mathbb{O} & & & 1 \\ & & & & \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{I}_k + F$$

Así, aplicando los puntos 3 y 5 del teorema 8 se obtiene que

$$\exp{(J_\lambda t)} = \exp{((\lambda \mathbb{I}_k + F) \cdot t)} = \exp{(\lambda \mathbb{I}_k \cdot t)} \cdot \exp{(F \cdot t)} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \mathbb{I}_k \cdot \exp{(F \cdot t)} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \exp{(F \cdot t)}$$

Luego, sólo nos queda calcular $\exp(F\cdot t)$, para lo cual como F es una matriz nilpotente de orden k –i.e. $F^k = \mathbb{O}$– se tiene

$$\exp(F\cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{k-1} F^n \frac{t^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que la diagonal de unos de F va subiendo en cada potencia. La prueba ha concluido. □

Teorema 13 (Cálculo de la exponencial de una matriz real)**.** *Para calcular la exponencial de una matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, basta calcular la forma canónica de Jordan, $J = diag(J_0, \ldots, J_r)$, mediante una matriz de cambio P. Y aplicar*

$$\exp(At) = P^{-1}\exp(Jt)P = P^{-1} diag\left(\exp(J_0 t), \ldots, \exp(J_r t)\right) P$$

donde para cada bloque básico de Jordan de orden k_i, J_i, se da

$$\exp(J_i t) = \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \cdot t\right) = e^{\lambda_i t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{k_i-2}}{(k_i-2)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{t^{k_i-3}}{(k_i-3)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Basta aplicar los tres lemas anteriores. □

Colorario 14 (Cálculo de la exponencial de una matriz diagonalizable)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ diagonalizable por la matriz de paso P, i.e.*

$$A = P^{-1} diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1})P$$

Se verifica que

$$\exp(A\cdot t) = P^{-1} diag(e^{\lambda_0}, \ldots, e^{\lambda_{m-1}})P$$

Como hemos visto, generalmente cuando la matriz es diagonalizable los cálculos se simplifican considerablemente. Los dos siguientes teoremas nos dan condiciones suficientes de diagonazibilidad de la matriz.

Teorema 15 (Criterio suficiente de diagonazibilidad)**.** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$; si todos sus autovalores son disintos dos a dos, entonces es diagonalizable.*

Teorema 16 (Teorema espectral)**.** *Dada una matriz real simétrica $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, se verifica que*

1. *Todos sus autovalores, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$, son reales.*

2. *Existe una matriz ortogonal $P \in O(m, \mathbb{R})$ que la diagonaliza, i.e. tal que*

$$A = P^{-1} diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1})P = P^t diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1})P$$

Ejemplo 3. *Calculemos* $\exp(At)$ *para la matriz A dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 6 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

usando el método de Jordan.

Calculamos el característico obteniendo,

$$\chi_A(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$$

Así, por el teorema 15 la matriz es diagonalizable. Ahora calculemos los vectores propios asociados a los respectivos autovalores 1,3,5.
Valor propio 1
En este caso, el sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -12 & 0 \\ 6 & -8 & 14 & 0 \\ 2 & -4 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

de donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Valor propio 3
En este caso, el sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -12 & 0 \\ 6 & -10 & 14 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

de donde

$$v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Valor propio 5
En este caso, el sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -12 & 0 \\ 6 & -12 & 14 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

de donde

$$v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Así, como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ y \ P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Y así,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 6 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -9 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot diag(1,3,5) \cdot P$$

Lo que nos da que

$$\exp(At) = P^{-1} \cdot diag(e^t, e^{3t}, e^{5t}) \cdot P$$

Que desarrollando

$$\begin{pmatrix} -2e^{5t} + 6e^{3t} - 3e^t & 6e^{5t} - 12e^{3t} + 6e^t & -18e^{5t} + 30e^{3t} - 12e^t \\ -e^{5t} + 5e^{3t} - 4e^t & 3e^{5t} - 10e^{3t} + 8e^t & -9e^{5t} + 25e^{3t} - 16e^t \\ e^{3t} - e^t & -2e^{3t} + 2e^t & 5e^{3t} - 4e^t \end{pmatrix}$$

4.2. Algoritmo de Putzer

El algoritmo de Putzer, se basa en aplicar el siguiente teorema que vamos a demostrar.

Teorema 17 (Fórmula espectral de Putzer). *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ sus autovalores –no necesariamente distintos–, entonces*

$$\exp(A \cdot t) = \sum_{n=0}^{m-1} p_n(t) M_n$$

donde

$$M_n = \begin{cases} \mathbb{I}_m & \textit{si } n = 0 \\ \prod_{i=0}^{n-1} (A - \lambda_i \mathbb{I}_m) & \textit{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Y

$$\begin{pmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \\ \vdots \\ p_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \\ \vdots \\ p_{n-1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea

$$F(t) = \sum_{n=0}^{m-1} p_n(t) M_n$$

por el teorema de unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales sólo hemos de mostrar que

$$F'(t) = A \cdot F(t)$$

Y que

$$F(0) = \mathbb{I}_m$$

para obtener la igualdad $F(t) = \exp(At)$.

En primer lugar, por la definición de las funciones p_i se verifica que

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_0 \cdot p_0 \\ p_i' = \lambda_i \cdot p_i + p_{i-1} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En segundo lugar, notemos que por la definión de los M_i se comprueba que

$$\lambda_k \cdot M_k = A \cdot M_k - M_{k+1}$$

para cada k.

Y en tercer lugar, se ve que

$$M_m = \prod_{i=0}^{m-1} (A - \lambda_i \mathbb{I}_m) = \mathbb{O}$$

por el teorema de Cayley-Hamilton y ser $\prod_{i=0}^{m-1} (A - \lambda_i \mathbb{I}_m) = \chi_A(A)$.

De los dos hechos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{n=0}^{m-1} p_n'(t) M_n \\ &= p_0'(t) \cdot \mathbb{I}_m + \sum_{n=1}^{m-1} p_n'(t) M_n \\ &= \lambda_0 \cdot p_0(t) \cdot \mathbb{I}_m + \sum_{n=1}^{m-1} (\lambda_n \cdot p_n(t) + p_{n-1}(t)) M_n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \cdot p_n(t) M_n + \sum_{n=1}^{m-1} p_{n-1}(t) M_n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} p_n(t) \cdot (A \cdot M_n - M_{n+1}) + \sum_{n=0}^{m-2} p_n(t) M_{n+1} \\ &= A \cdot \sum_{n=0}^{m-1} p_n(t) M_n - \sum_{n=0}^{m-1} p_n(t) M_{n+1} + \sum_{n=0}^{m-2} p_n(t) M_{n+1} \\ &= A \cdot F(t) - p_{m-1}(t) M_m = A \cdot F(t) \end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$F(0) = p_0(0)\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_m$$

Con lo que concluye la prueba. $\square$

Así, tenemos una forma alternativa de calcular la exponencial de una matriz sin usar la forma canónica de Jordan, si bien cabe remarcar lo siguiente a la hora de usar la fórmula espectral de Putzer:

1. A pesar de evitar el paso a la forma canónica de Jordan, no se elimina la necesidad de calcular el polinomio característico ni sus raíces y se tendrán dificultades al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante.

2. Si reordenamos adecuamente los autovalores, tenemos que las expresiones del tipo

$$M_n = \prod_{i=0}^{n-1} (A - \lambda_i \mathbb{I}_m)$$

se anulan para un menor n, al obtener antes la igualdad

$$\prod_{i=0}^{n-1} (A - \lambda_i \mathbb{I}_m) = \mu_A(A) = \mathbb{O}$$

donde μ_A es el polinomio mínimo de A.

Ejemplo 4. *Calculemos la exponencial* $\exp(At)$ *para la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 18518 & 90 & -846 & 18538 \\ -10 & 18496 & 90 & -845 & 18515 \\ -24 & 44411 & 217 & -2029 & 44459 \\ -46 & 85583 & 414 & -3908 & 85675 \\ 8 & -14773 & -72 & 675 & -14788 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\chi_A(t) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6 = (x-1)^3 \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

Y cuyo polinomio mínimo es

$$\mu_A(t) = x^3 + 11x^2 - 6x - 6 = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

de dos formas mediante el algoritmo de Putzer. En la primera, tomaremos para los autovalores en el orden

$$\{1, 1, 1, 2, 3\}$$

y en la segunda en la forma

$$\{1, 2, 3, 1, 1\}$$

Primera forma. *En este caso, resolvamos primero el sistema*

$$\begin{pmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \\ p_3'(t) \\ p_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ p_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde al resolver, con los métodos usuales obtenemos

$$\begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ \frac{t^2}{2} e^t \\ -\frac{1}{2}\left(t^2 + 2t + 2\right) e^t + e^{2t} \\ \frac{1}{8}\left(2t^2 + 6t + 7\right) e^t - e^{2t} + \frac{1}{8} e^{3t} \end{pmatrix}$$

Y por otro lado al hallar los M_i se tiene para las matrices M_i tenemos que

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} -10 & 18518 & 90 & -846 & 18538 \\ -10 & 18495 & 90 & -845 & 18515 \\ -24 & 44411 & 216 & -2029 & 44459 \\ -46 & 85583 & 414 & -3909 & 85675 \\ 8 & -14773 & -72 & 675 & -14789 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -20 & 37128 & 180 & -1696 & 37168 \\ -20 & 37105 & 180 & -1695 & 37145 \\ -48 & 89075 & 432 & -4069 & 89171 \\ -92 & 171189 & 828 & -7819 & 171373 \\ 16 & -29661 & -144 & 1355 & -29693 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} -40 & 74348 & 360 & -3396 & 74428 \\ -40 & 74325 & 360 & -3395 & 74405 \\ -96 & 178403 & 864 & -8149 & 178595 \\ -184 & 342401 & 1656 & -15639 & 342769 \\ 32 & -59437 & -288 & 2715 & -59501 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -40 & 74440 & 360 & -3400 & 74520 \\ -40 & 74440 & 360 & -3400 & 74520 \\ -96 & 178656 & 864 & -8160 & 178848 \\ -184 & 342424 & 1656 & -15640 & 342792 \\ 32 & -59552 & -288 & 2720 & -59616 \end{pmatrix}, \; M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que sumando nos da que $\exp(At)$ *es igual a*

$$\begin{pmatrix} -5e^{3t}+6e^t & 9305e^{3t}-92e^{2t}-9213e^t & 45e^{3t}-45e^t & -425e^{3t}+4e^{2t}+421e^t & 9315e^{3t}-92e^{2t}-9223e^t \\ -5e^{3t}+5e^t & 9305e^{3t}-115e^{2t}-9189e^t & 45e^{3t}-45e^t & -425e^{3t}+5e^{2t}+420e^t & 9315e^{3t}-115e^{2t}-9200e^t \\ -12e^{3t}+12e^t & 22332e^{3t}-253e^{2t}-22079e^t & 108e^{3t}-107e^t & -1020e^{3t}+11e^{2t}+1009e^t & 22356e^{3t}-253e^{2t}-22103e^t \\ -23e^{3t}+23e^t & 42803e^{3t}-23e^{2t}-42780e^t & 207e^{3t}-207e^t & -1955e^{3t}+e^{2t}+1955e^t & 42849e^{3t}-23e^{2t}-42826e^t \\ 4e^{3t}-4e^t & -7444e^{3t}+115e^{2t}+7329e^t & -36e^{3t}+36e^t & 340e^{3t}-5e^{2t}-335e^t & -7452e^{3t}+115e^{2t}+7338e^t \end{pmatrix}$$

Segunda forma. *Aquí, el sistema es, sin embargo,*

$$\begin{pmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \\ p_3'(t) \\ p_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ p_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero, como para las matrices M_i tenemos que

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} -10 & 18518 & 90 & -846 & 18538 \\ -10 & 18495 & 90 & -845 & 18515 \\ -24 & 44411 & 216 & -2029 & 44459 \\ -46 & 85583 & 414 & -3909 & 85675 \\ 8 & -14773 & -72 & 675 & -14789 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -10 & 18610 & 90 & -850 & 18630 \\ -10 & 18610 & 90 & -850 & 18630 \\ -24 & 44664 & 216 & -2040 & 44712 \\ -46 & 85606 & 414 & -3910 & 85698 \\ 8 & -14888 & -72 & 680 & -14904 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sólo hace falta calcular las tres primeras soluciones. Así,

$$\begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t}-e^t \\ \frac{1}{2}e^{3t}-e^{2t}+\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$$

Y obtenemos tras sumar que $\exp(At)$ *es*

$$\begin{pmatrix} -5e^{3t}+6e^{t} & 9305e^{3t}-92e^{2t}-9213e^{t} & 45e^{3t}-45e^{t} & -425e^{3t}+4e^{2t}+421e^{t} & 9315e^{3t}-92e^{2t}-9223e^{t} \\ -5e^{3t}+5e^{t} & 9305e^{3t}-115e^{2t}-9189e^{t} & 45e^{3t}-45e^{t} & -425e^{3t}+5e^{2t}+420e^{t} & 9315e^{3t}-115e^{2t}-9200e^{t} \\ -12e^{3t}+12e^{t} & 22332e^{3t}-253e^{2t}-22079e^{t} & 108e^{3t}-107e^{t} & -1020e^{3t}+11e^{2t}+1009e^{t} & 22356e^{3t}-253e^{2t}-22103e^{t} \\ -23e^{3t}+23e^{t} & 42803e^{3t}-23e^{2t}-42780e^{t} & 207e^{3t}-207e^{t} & -1955e^{3t}+e^{2t}+1955e^{t} & 42849e^{3t}-23e^{2t}-42826e^{t} \\ 4e^{3t}-4e^{t} & -7444e^{3t}+115e^{2t}+7329e^{t} & -36e^{3t}+36e^{t} & 340e^{3t}-5e^{2t}-335e^{t} & -7452e^{3t}+115e^{2t}+7338e^{t} \end{pmatrix}$$

Referencias

[1] A.F. Filíppov, Introducción a la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Editorial URSS, Moscú. 2007. ISBN 5-484-00999-5

[2] Grant B. Gustafson, *10.4 Matrix Exponential*. Lecture Notes, University of Utah. `http://www.math.utah.edu/~gustafso/2250matrixexponential.pdf`

[3] Jay A. Wood, *The Chain Rule for Matrix Exponential Functions.* **The College Mathematical Journal, Vol. 35, No. 3, May 2004**. `http://homepages.wmich.edu/~jwood/eprints/chain-rule.pdf`

[4] Cleve Molery y Charles Van Loanz, *Nineteen Dubious Methods for Computing the Exponential of a Matrix, Tewnty Five Years Later.* **SIAM REVIEW Vol. 45, No. 1** 2003, Society for Industrial and Applied Mathematics `http://www.cs.cornell.edu/cv/researchpdf/19ways+.pdf`

[5] Math StackExchange. `http://math.stackexchange.com/`

[6] ProofWiki. `http://www.proofwiki.org/`

[7] Wolfram MathWorld. `http://mathworld.wolfram.com/`

[8] Wikipedia, The Free Encyclopedia. `http://www.wikipedia.org/`