

# Demostrando el Teorema de la Curva de Jordan<sup>1</sup>

*Josué Tonelli Cueto*

## Objetivos

- Contextualizar el teorema y su demostración en las matemáticas y su historia.
- Dar una demostración completa del teorema.
- Esquematizar posibles demostraciones alternativas, basadas en otras técnicas.

## Índice

<b>0. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. Una breve historia</b>	<b>3</b>
<b>2. La demostración de Maehara</b>	<b>4</b>
2.1. Sobre Maehara . . . . .	4
2.2. Preliminares. El teorema del punto fijo de Brouwer. . . . .	4
2.3. Preliminares. El teorema de extensión de Tietze . . . . .	7
2.4. Pasos principales de la demostración . . . . .	8
2.5. Detalles de cada paso . . . . .	9
2.5.1. Paso 1 . . . . .	9
2.5.2. Paso 2 . . . . .	9
2.5.3. Paso 3 . . . . .	10
2.5.4. Paso 4 . . . . .	12
2.5.5. Paso final . . . . .	14
<b>3. Otras dos posibles demostraciones. Esquemas.</b>	<b>14</b>
3.1. La demostración de Jordan (revisitada por Hales) . . . . .	14
3.1.1. Sobre Jordan . . . . .	15
3.1.2. Sobre Hales . . . . .	15
3.1.3. Idea principal . . . . .	15
3.1.4. Itinerario de pasos . . . . .	15
3.1.5. Esquema de la demostración. Algunos detalles. . . . .	16
3.2. La demostración de Thomassen . . . . .	20
3.2.1. Sobre Thomassen . . . . .	20
3.2.2. Idea principal . . . . .	20
3.2.3. Itinerario de pasos . . . . .	22
3.2.4. Esquema de la demostración. Algunos detalles. . . . .	22
<b>4. ¿Y en general?</b>	<b>25</b>
4.1. Teorema de separación de Jordan-Brouwer . . . . .	26
4.2. Teorema de separación de Alexander . . . . .	26
4.3. Teorema de Jordan-Schönflies . . . . .	26
<b>5. Bibliografía</b>	<b>27</b>

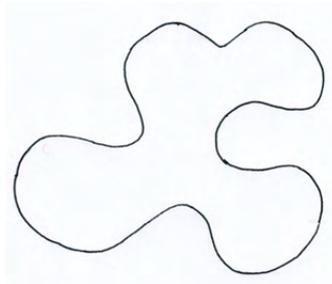
<sup>1</sup>Trabajo realizado para el curso “Teoría Global de Superficies” de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) durante el curso académico 2011/12. El curso fue impartido por la profesor José Julio Mencia González. Modificaciones menores pueden haber ocurrido sobre el original de este documento para garantizar su correctitud.

## 0. Introducción

Antes de comenzar, recordemos primero la definición de curva de Jordan

**Definición 0.1.** Una curva de Jordan es un subespacio de  $(\mathbb{R}^2, d_u)$  homomorfo a la circunferencia  $(\mathbb{S}^1, d_u)$ .

De este modo, claramente



es una representación gráfica de una curva de Jordan.

Fijémonos que si operamos desde un punto de vista de aplicaciones, entonces consideramos las curvas como aplicaciones continuas  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Y desde esta perspectiva, una curva de Jordan no es más que una curva cerrada y simple, i.e. una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\alpha(0) = \alpha(1)$$

y que  $\alpha|_{[0,1]}$  es inyectiva.

Y sin embargo, en ambos casos estamos operando esencialmente con la misma definición, dado que la compacidad de  $I$  nos permite concluir que bajo las condiciones anteriores  $Im\alpha$  es una curva de Jordan según la definición dada inicialmente.

[Efectivamente, basta considerar la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 &\rightarrow Im\alpha \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\mapsto \alpha\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

con las convenciones básicas, i.e tomar  $\theta \in [0, 2\pi)$ ; se observa que  $f$  es el homeomorfismo deseado, tras realizar las comprobaciones pertinentes.]

De esta forma, el teorema de la curva de Jordan puede formularse como sigue

**Teorema 0.1 (Jordan).** Si  $J \subseteq (\mathbb{R}^2, d_u)$  es una curva de Jordan, entonces  $\mathbb{R}^2 - J$  posee exactamente dos componentes conexas.

Siendo este teorema el que vamos a analizar desde la perspectiva de tres demostraciones distintas:

- Demostración de Maehara.
- Demostración de Jordan (revisitada por Hales)
- Demostración de Thomassen.

De las cuales la primera la atacaremos con todo detalle para dar una prueba completa del teorema, y las otras dos las trataremos con menos detalle dando principalmente las ideas principales y caminos que se siguen en ellas para así motivarlas para una posible futura lectura.

# 1. Una breve historia

En la presente cronología, que dista bastante de ser completa, podemos ver la evolución de las pruebas del teorema de la curva de Jordan a lo largo del tiempo.

- 1893 Jordan enuncia y demuestra su teorema en su *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*.
- 1905 Veblen critica la prueba de Jordan, afirmando que “asume el teorema sin demostración en el importante caso de una línea poligonal simple”, y da su propia prueba en su artículo *Theory of Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs*.
- 1911 Brouwer y Lebesgue, de forma independiente, llegan a la generalización del teorema de Jordan a hipersuperficies homeomorfas a hiperesferas, en lo que se conoce como el teorema de Jordan-Brouwer.
- 1922 Alexander extiende el teorema de Jordan-Brouwer de hipersuperficies homeomorfas a la hiperesfera a hipersuperficies compactas y conexas en su artículo *A Proof and Extension of the Jordan-Brouwer Separation Theorem*.
- 1924 Schönflies, tras estudiar los trabajos de Jordan, generaliza y prueba el teorema de Jordan, en lo que se conoce como el teorema de Jordan-Schönflies.
- 1924 Alexander da un contraejemplo al teorema de Jordan-Schönflies en el caso  $n$  dimensional en su artículo *An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected*.
- 1971 Narens da una demostración usando análisis no estándar en su artículo *A nonstandard proof of the Jordan Curve Theorem*.
- 1975 Berg, Julian y Mines dan una prueba usando el análisis constructivo de Bishop en su artículo *The Constructive Jordan Curve Theorem*.
- 1977 Moise da una demostración intuitiva y transparente en su libro *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*.
- 1984 Maehara se basa en la demostración de Moise para dar una prueba basada en el teorema del punto fijo de Brouwer en su artículo *The Jordan Curve Via The Brouwer Fixed Point Theorem*.
- 1992 Thomassen da una prueba basada en teoría de grafos, en particular la no planaridad de  $K_{3,3}$ , en su artículo *The Jordan-Schonflies Theorem and the Classification of Surfaces*.
- 2005 Hales completa la primera prueba totalmente formal, realizando las comprobaciones mediante ordenador, en el sistema HOL Light basándose en el trabajo de Thomassen. La prueba formal consta de 138 definiciones, 1381 lemas y 44000 pasos desperdigados en 59000 líneas de código.
- 2007 Hales rescata la demostración de Jordan en su artículo *Jordan's proof of the Jordan Curve theorem*, afirmando que “no hay nada que objetar al respecto” en la prueba de Jordan.

## 2. La demostración de Maehara

La demostración de Maehara original puede leerse en [5] y data de 1984. Una de sus grandes ventajas es que es corta y sencilla a la hora de leer. En sí misma, esta demostración es una modificación de la dada por Moise, que se aprovecha de los teoremas del punto fijo de Brouwer para dos dimensiones y el teorema de extensión de Tietze, los cuales probaremos. Por ello, podremos decir que vamos a dar una prueba completa y rigurosa del teorema en toda su generalidad.

Es recomendable leer [5], dado que constituye una buena y breve lectura, a la hora de estudiar una demostración del teorema de la curva de Jordan.

### 2.1. Sobre Maehara

La información disponible acerca del matemático japonés Ryuji Maehara lamentablemente es escasa, según el *Mathematics Genealogy Project* sabemos que se doctoró en la *Iowa State University* en 1972 defendiendo la tesis *An Obstruction Theory for Fibre-preserving Maps* bajo la dirección de James Lawson Cornette y Daniel Henry Gottlieb. Y por las referencias dadas en su artículo sabemos que trabajó en la Universidad de Ryukyu en Okinawa.

Cabe destacar que la principal razón por la que es conocido es la prueba del teorema de Jordan que el mismo da en [5].

### 2.2. Preliminares. El teorema del punto fijo de Brouwer.

**Teorema 2.1** (Punto fijo de Brouwer). *Sea  $B_n \subset (\mathbb{R}^n, d_u)$  una bola cerrada euclídea. Toda aplicación continua  $f : B_n \rightarrow B_n$  posee al menos un punto fijo.*

La demostración que realizaremos se basa en la dada en [1], la limitaremos sólo al caso  $n = 2$ , que es el que nos interesa, y será de carácter combinatorio, la cual se basa en el lema de Sperner.<sup>2</sup>



Emanuel Sperner [11]

**Lema 2.2** (Sperner). *Sea  $T$  un triángulo con vértices  $v_1, v_2$  y  $v_3$ , del cual poseemos una triangulación, una subdivisión de él en triángulos más pequeños que encajan lado con lado.*

*Supongamos que coloreamos el triángulo con los colores del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  de modo que se verifique que:*

- *Cada vértice  $v_i$  está coloreado por el color  $i$ .*
- *Dados  $i \neq j$ , los vértices en el lado que une  $v_i$  y  $v_j$  están coloreados o por  $i$  o por  $j$ .*

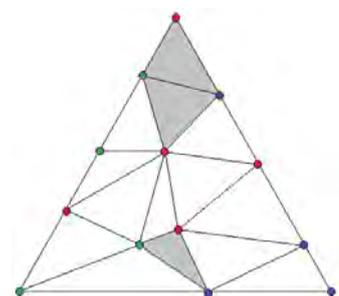
*Entonces, existe al menos un triángulo tricolor entre los que conforman la triangulación, i.e. que cada uno de sus vértices está coloreado de un color.*

#### **Prueba:**

Tomemos el grafo  $G$  cuyos vértices son los triángulos de la triangulación y la cara exterior del plano donde vive el triángulo considerado y de modo que dos de estos estén unidos por una arista si y sólo si

- Son adyacentes, i.e. poseen un lado en común.

<sup>2</sup>Si bien la prueba puede extenderse a  $n$  dimensiones con esta técnica.



- Los dos extremos del lado que comparten están coloreados por los colores 1 y 2.

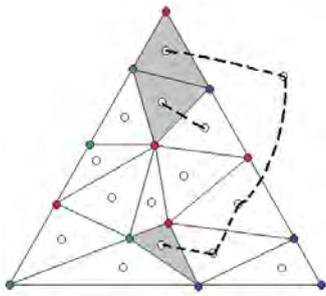
A partir de aquí, fijémonos que:

- Los triángulos tricolores dan lugar a vértices grado uno.
- Los triángulos coloreados por 1 y 2 originan vértices de grado 2.
- El resto de triángulos se corresponden con los vértices de grado 0.

Por otro lado, el vértice correspondiente a la cara exterior tiene grado impar. Para ello, observar que solamente los lados que están en el segmento que une  $v_1$  y  $v_2$  pueden estar coloreados con 1 y 2, y que necesariamente en ese vértice el número de cambios de 1 a 2 y viceversa es impar.

De ello, en dicho segmento, y por extensión en todo el perímetro del triángulo, hay un lado impar de segmentos cuyos vértices están coloreados con 1 y 2. Por lo que el vértice de la cara exterior tendrá grado impar.

De este modo,



- Los vértices de grado impar corresponden a la cara exterior y los triángulos tricolores de la triangulación.
- Los vértices de grado par se corresponden al resto de triángulos de la triangulación.

Ahora, por el lema de los saludos,

**El número de vértices de grado impar en un grafo finito es par.**

De esta forma, nuestro grafo tiene una cantidad par de vértices de grado impar, lo que se traduce quitando la cara exterior, en que

**Hay un número impar de triángulos tricolores en la triangulación.**

Que nos da la existencia deseada, al ser el menor número natural impar el uno.

□

**Demostración del teorema de Brouwer** (en dimensión 2)

Sea  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^3$  el triángulo de vértices  $e_1 = (1,0,0)$ ,  $e_2 = (0,1,0)$  y  $e_3 = (0,0,1)$ . Dado que  $\Delta$  es homeomorfo a  $B_2$ , basta probar que  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  continua tiene un punto fijo.

Sea ahora,  $\delta(T)$  la longitud máxima de los lados en una triangulación  $T$ . Construyamos la sucesión de triangulaciones

$$\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

caracterizada porque

$$\delta(T_n) \rightarrow 0$$

La cual puede ser fácilmente construida subdividiendo la triangulación anterior para obtener la siguiente.

Ahora, razonemos por reducción al absurdo y supongamos que  $f$  no tiene puntos fijos en  $\Delta$ . De aquí, dado  $v \in \Delta$ , consideremos el signo de las componentes de

$$f(v) - v$$

Dado que el triángulo está en el plano dado por

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Tenemos que para cada  $v \in \Delta$ ,

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1 \text{ y } f(v)_1 + f(v)_2 + f(v)_3 = 1$$

Nos queda

$$(f(v)_1 - v_1) + (f(v)_2 - v_2) + (f(v)_3 - v_3) = 0$$

Ergo, se da que  $f(v) - v$  tiene al menos una componente positiva y otra negativa bajo la hipótesis de que  $f(v)$  y  $v$  son distintos.

A partir de aquí, definamos la función  $\lambda : \Delta \rightarrow \{1, 2, 3\}$  de asignación de color como

$$\lambda(v) = \text{mín}\{i : f(v)_i - v_i < 0\}$$

De este modo, comprobemos que para cada triangulación  $T$  de  $\Delta$  este coloreamiento verifica las condiciones del lema de Sperner.

Primero, dado un vértice  $e_i$  se da que la única componente negativa posible de

$$f(e_i) - e_i$$

es la  $i$ -ésima, luego necesariamente  $\lambda(e_i) = i$ . Y segundo, si consideramos un vértice  $v$  del lado opuesto a  $e_i$ , se da que la  $i$ -ésima componente de

$$f(v) - v$$

es siempre no negativa al serlo la de  $f(v)$  y ser nula la de  $v$ . En conclusión se verifican las condiciones del lema de Sperner.

Así, para cada  $n$  por el lema de Sperner, sabemos que existe un triángulo tricolor

$$\{v^{n:1}, v^{n:2}, v^{n:3}\}$$

i.e. que para cada  $i$ ,  $\lambda(v^{n:i}) = i$ . Sin embargo, la sucesión de puntos

$$\{v^{n:1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

no converge necesariamente pero, como  $\Delta$  es compacto y métrico, sabemos que posee una subsucesión convergente

$$\{v^{\varphi(n):1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

que converge a un punto  $v \in \Delta$ . Ahora, como  $\delta(T_{\varphi(n)}) \rightarrow 0$ , se da que las sucesiones

$$\{v^{\varphi(n):2}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ y } \{v^{\varphi(n):3}\}_{n \in \omega}$$

convergen también al mismo punto  $v$ . Y como, para cada  $n$  y cada  $i$  se da que

$$f(v^{\varphi(n):i})_i < v_i^{\varphi(n):i}$$

De lo que en el límite, por la continuidad de  $f$ , para cada  $i$ ,

$$f(v)_i \leq v_i$$

Luego, ninguna componente de

$$f(v) - v$$

es positiva, lo cual contradice que

$$f(v) \neq v$$

Así, por *reductio ad absurdum*,  $f$  posee al menos un punto fijo.

□

### 2.3. Preliminares. El teorema de extensión de Tietze

**Teorema 2.3** (Extensión de Tietze para métricos). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  un subconjunto cerrado suyo. Toda función continua  $f : A \rightarrow [-1, 1]$  puede extenderse a todo el espacio de partida, i.e. existe una función continua  $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$ , tal que  $\bar{f}_A = f$ .*

La demostración que daremos se basa en la dada en [2], sin embargo, ha sido simplificada gracias a que sólo nos interesa el caso métrico y no el topológico general.

**Demostración:**



**Pavel Urysohn** [12]

**Lema 2.4** (Lema métrico de Urysohn). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A, B$  subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos. Existe una función continua*

$$f : (X, d) \rightarrow ([0, 1], d_u)$$

*tal que  $f(x) = 0$  si y sólo si  $x \in A$  y  $f(x) = 1$  si y sólo si  $x \in B$ .*

**Prueba**

Basta tomar,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

Y ver que lo verifica. ■

De esta forma, denotemos por  $U_B^A$  la función construida en el lema anterior. Ahora, dada una función continua cualquiera  $g : A \rightarrow [-a, a]$  definamos

$$Tg : X \rightarrow [-a, a]$$

como la función dada por

$$Tg = \frac{a}{3} U_{g^{-1}[a/3, a]}^{g^{-1}[-a, -a/3]} - \frac{a}{3} U_{g^{-1}[-a, -a/3]}^{g^{-1}[a/3, a]}$$

Claramente, para cada  $x \in X$ ,

$$|Tg(x)| \leq \frac{a}{3}$$

También es fácil comprobar que para cada  $x \in A$ ,

$$|Tg(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}a$$

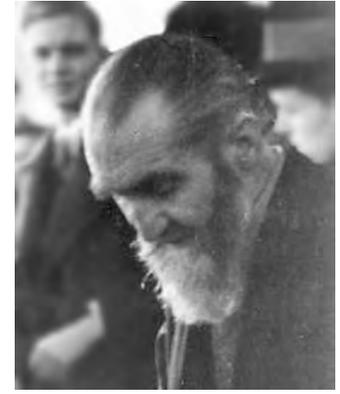
Y así, podemos ver también  $Tg - g$  como una aplicación continua de  $A$  en  $[-\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a]$ . Lo cual nos permite volver a operar con  $T$ .

Para nuestra  $f : A \rightarrow [-1, 1]$ , construyamos

$$\{f_n\}$$

como

$$f_n = T \left( f - \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right)$$



**Heinrich Franz  
Friedrich Tietze** [13]

De esta forma, por inducción, se ve que para cada  $x \in A$ ,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

Y, como consecuencia, para cada  $x \in X$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

De lo que, como

$$\frac{1}{3} \sum_{n \in \omega} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 1 < \infty$$

Se da que  $F = \sum_{n \in \omega} f_n$  es una función bien definida de todo  $X$  a  $[-1, 1]$ , tal que  $F_A = f$ .  
Veamos que  $F$  es continua. Dados  $x \in X$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , tomamos un  $N_{\varepsilon, x}$  tal que

$$\sum_{k=N_{\varepsilon, x}}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora,  $f_i$  es continua en  $x$ , luego hay entornos  $U_i$  de  $x$  en  $(X, d)$  tales que para cada  $i < N_{\varepsilon, x}$  y cada  $y \in U_i$ ,

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2N_{\varepsilon, x}}$$

De esta forma,  $U = \cap_i U_i$  es un entorno de  $x$  donde para cada  $y \in U$ ,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \sum_{k=0}^{N_{\varepsilon, x}-1} |f_k(x) - f_k(y)| + \sum_{k=N_{\varepsilon, x}}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{k+1} \\ &\leq N_{\varepsilon, x} \frac{\varepsilon}{2N_{\varepsilon, x}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo que  $F$  es continua en  $X$ , y por ello es la extensión deseada, i.e.  $F = \bar{f}$ .

□

## 2.4. Pasos principales de la demostración

La demostración de Maehara se basa en los siguientes pasos:

1. Existencia y unicidad de la componente no acotada.
2. Lema del rectángulo cruzado.
3. Lema de la frontera.
4. Existencia y unicidad de la componente acotada.

Cada uno de estos pasos lo mostraremos detalladamente, y puede decirse que los resultados aquí presentes resultan muchos de ellos de interés por si solos. Además, hemos de fijarnos como los dos lemas no son más que resultados auxiliares a la hora de demostrar la existencia y unicidad de la componente acotada.

## 2.5. Detalles de cada paso

### 2.5.1. Paso 1

**Proposición 2.5.** Sea  $n > 1$  y  $K \subset (\mathbb{R}^n, d_u)$  compacto. Se verifica que  $\mathbb{R}^n - K$  tiene una única componente conexa no acotada.

#### *Prueba*

Sea  $B$  la bola centrada en el origen que contiene al compacto  $K$ , se verifica que

$$\mathbb{R}^n - B \subseteq \mathbb{R}^n - K$$

Y así, simplemente consideremos la componente conexa  $U$  que contiene al conexo no acotado  $\mathbb{R}^n - B$ . Obviamente  $U$  es no acotado, además si  $V$  es una componente no acotada de  $\mathbb{R}^n - K$  se dará que  $V \cap (\mathbb{R}^n - B) \neq \emptyset$ , y así  $V \cap U \neq \emptyset$  que fuerza a que  $U = V$ .

□

A partir de este resultado, obtenemos un colorario para el caso que nos interesa,

**Corolario 2.6.** Sea  $J \subset (\mathbb{R}^2, d_u)$  una curva de Jordan.  $\mathbb{R}^2 - J$  tiene exactamente una componente conexa no acotada.

### 2.5.2. Paso 2

**Lema 2.7** (Lema del rectángulo cruzado). Sea  $A \subseteq (\mathbb{R}^2, d_u)$  un rectángulo. Si  $\alpha : I \rightarrow A$  y  $\beta : I \rightarrow A$  caminos que van respectivamente del lado izquierdo al lado derecho y del lado inferior al lado superior, entonces  $\alpha$  y  $\beta$  se intersecan al menos en un punto.

#### *Prueba*

Sin pérdida de generalidad tomemos

$$A = [0, 1] \times [0, 1] \text{ e } I = [-1, 1]$$

tras transformaciones afines adecuadas. Así, la condiciones dadas se traducen en

$$\alpha_1(-1) = 0, \alpha_1(1) = 1, \beta_2(-1) = 0, \beta_2(1) = 1$$

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que no se cortan. En ese contexto, la función norma máxima entre  $\alpha$  y  $\beta$  dada por

$$N : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (s, t) \mapsto \max\{|\alpha_1(s) - \beta_1(t)|, |\alpha_2(s) - \beta_2(t)|\}$$

que por hipótesis de que  $\alpha$  y  $\beta$  no se cortan, verifica

$$\text{para cada } s, t \in [-1, 1], N(s, t) \neq 0$$

De este modo, podemos definir la siguiente aplicación continua de  $[-1, 1]^2$  en sí mismo

$$F : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2 \\ (s, t) \mapsto \left( \frac{\beta_1(t) - \alpha_1(s)}{N(s, t)}, \frac{\alpha_2(s) - \beta_2(t)}{N(s, t)} \right)$$

dado que  $N$  nunca se anula. Fijémonos, en que necesariamente para cada  $s, t \in [-1, 1]$ ,

$$|F_1(s, t)| = 1 \text{ ó } |F_2(s, t)| = 1$$

por definición de  $N$ . Ahora, por el teorema del punto fijo de Brouwer, se debe dar que  $F$  posee un punto fijo  $(s_0, t_0)$ . Ahora, por lo anterior,

$$|s_0| = 1 \text{ ó } |t_0| = 1$$

Analizando casos, tenemos que

A) Si  $s_0 = -1$ , la primera componente de  $F(-1, t_0)$  será

$$\frac{\beta_1(t_0)}{N(-1, t_0)}$$

que es no negativa, y por lo tanto  $F(-1, t_0) \neq (-1, t_0)$ .

B) Si  $s_0 = 1$ , la primera componente de  $F(1, t_0)$  será

$$\frac{\beta_1(t_0) - 1}{N(1, t_0)}$$

que es no positiva, y por lo tanto  $F(1, t_0) \neq (1, t_0)$ .

C) Si  $t_0 = -1$ , la segunda componente de  $F(s_0, -1)$  será

$$\frac{\alpha_2(-1)}{N(s_0, -1)}$$

que es no negativa, y por lo tanto  $F(s_0, -1) \neq (s_0, -1)$ .

D) Si  $t_0 = 1$ , la segunda componente de  $F(s_0, 1)$  será

$$\frac{\alpha_2(t_0) - 1}{N(s_0, 1)}$$

que es no positiva, y por lo tanto  $F(s_0, 1) \neq (s_0, 1)$ .

De este modo, por un lado  $F$  tiene puntos fijos por el teorema de Brouwer, y por otro lado no los tiene. Esto es absurdo, y así por *reductio ad absurdum* ha de darse que  $\alpha$  y  $\beta$  intersecan en un punto.

□

### 2.5.3. Paso 3

**Lema 2.8** (Lema de la frontera). *Sea  $J \subset (\mathbb{R}^2, d_u)$  una curva de Jordan. Si  $\mathbb{R}^2 - J$  no es conexo, entonces cada componente de  $\mathbb{R}^2 - J$  tiene como frontera a  $J$ .*

#### **Prueba**

Sea  $U$  una componente de  $\mathbb{R}^2 - J$ , fijémonos en que dada cualquier otra componente  $W$  de  $\mathbb{R}^2 - J$  se verifica que

- $W$  es abierta, dado que  $\mathbb{R}^2 - J$  es abierto y localmente conexo.
- $W$  y  $U$  son disjuntas.

De esa forma, tenemos que  $\text{Fr}(U) \cap W = \emptyset$ , y de ello se concluye que

$$\text{Fr}(U) \subseteq J$$

Ahora, supongamos que  $\text{Fr}(U) \neq J$ ; entonces, existe un arco  $A \subseteq J$  tal que

$$\text{Fr}(U) \subseteq A$$

Dado que por hipótesis  $\mathbb{R}^2 - J$  es no conexo, podemos considerar una componente acotada. Así, sea un punto  $o$  dentro de la componente acotada, de modo que si  $U$  es dicha componente, entonces tomamos  $o \in U$ . Y a su vez, una bola cerrada  $D$  centrada en  $o$  lo suficientemente grande que contenga a  $J$  y denotemos por  $S$  su frontera, dándose que está contenida en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - J$ .

Dado que  $A$  es homeomorfo a  $[-1, 1]$ , por el teorema de extensión de Tietze podemos extender la identidad

$$id_A : A \rightarrow A$$

a todo  $\mathbb{R}^2$ , i.e. podemos obtener una aplicación continua

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow A$$

tal que  $r_A = id_A$ . Por otro lado, definamos una aplicación  $q : D \rightarrow D - \{o\}$  como

$$q(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \in \bar{U} \\ z & \text{si } z \in \mathbb{R}^2 - U \end{cases} \quad \text{ó} \quad q(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in \bar{U} \\ r(z) & \text{si } z \in \mathbb{R}^2 - U \end{cases}$$

según  $U$  sea acotado o no lo sea respectivamente. Dándose que en ambos casos  $q$  está bien definida y es continua dado que en  $\text{Fr}(U) = \bar{U} \cap (\mathbb{R}^2 - U)$  contenida en  $A$ ,  $r$  es la identidad.

Dado que  $S$  está contenida en la componente no acotada,

$$q_S = id_S$$

Por otro lado, podemos considerar la proyección natural sobre  $S$

$$\pi : \mathbb{R}^2 - \{o\} \rightarrow S$$

Y si  $t : S \rightarrow S$  es la aplicación antipodal, tenemos que

$$t \circ \pi \circ q : D \rightarrow S \subseteq D$$

es una aplicación de la bola cerrada en sí misma que no tiene puntos fijos, basta ver que ellos estarían en  $S$ , pero que  $(t \circ \pi \circ q)_S = t$  no puede tener puntos fijos. Lo cual, contradice el teorema del punto fijo de Brouwer y así

$$J = \text{Fr}(U)$$

por *reductio ad absurdum*.

□

### 2.5.4. Paso 4

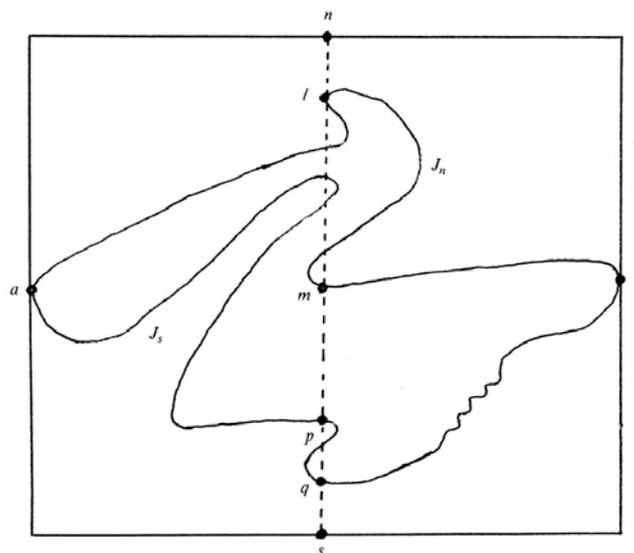
Sea  $J$  la curva de Jordan, primero realizaremos una construcción auxiliar alrededor de la curva para después aplicar los lemas obtenidos a la demostración del teorema de Jordan. Y de ese modo obtener en primer lugar que existe al menos una componente acotada, para en segundo lugar mostrar que es única.

#### *Construcción auxiliar*

Para realizar la construcción deseada sigamos los siguientes pasos, de modo que al final habremos encerrado la curva de Jordan en un rectángulo con una serie de objetos destacados.

1. Tomemos  $a, b \in J$  tales que su distancia sea máxima en virtud de la compacidad de  $J$ , y que por ello la función distancia,  $d : J \times J \rightarrow \mathbb{R}$ , alcanza su máximo y su mínimo.
2. Sin pérdida de generalidad, tras una transformación afín adecuada, consideremos que  $a = (-1, 0)$  y  $b = (1, 0)$ .
3. Consideremos el rectángulo  $E = [-1, 1] \times [-2, 2]$  que contine a  $J$  y cuya frontera sólo interseca a  $J$  en  $a$  y  $b$  por definición –dado que cualquier otro punto de intersección incumpliría la condición de maximalidad de  $a$  y  $b$ –.
4. Sean  $n = (0, 2)$  y  $s = (0, -2)$ , los puntos medios del lado superior e inferior respectivamente, llamemos  $\overline{ns}$  al segmento vertical que los une.
5. Por el lema del rectángulo cruzado,  $J$  y  $\overline{ns}$  no tienen intersección vacía.
6. Sea  $l$  el punto de  $J \cap \overline{ns}$  con coordenada  $y$  máxima
7. Dado que  $J$  se divide en dos arcos con extremos en  $a$  y  $b$ , denotemos con  $J_n$  el arco que contiene a  $l$  y con  $J_s$  el otro arco.
8. Denotemos con  $m$  el punto de coordenada  $y$  mínima y de  $J_n \cap \overline{ns}$ .
9. Denotemos por  $\widehat{lm}$  y  $\widehat{pq}$  los arcos en  $J_n$  y  $J_s$  que unen respectivamente  $l$  y  $m$  y  $p$  y  $q$ .
10. Por el lema del rectángulo cruzado, el arco  $\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{ms}$  interseca a  $J_s$ , pero obviamente ni  $\overline{nl}$  ni  $\widehat{lm} \subseteq J_n$  lo hacen, de lo que  $\overline{ms}$  interseca a  $J_s$ . Sea  $p$  el punto de coordenada  $y$  máxima de  $J_s \cap \overline{ms}$  y  $q$  el de coordenada  $y$  mínima.

Una imagen de lo que se obtiene después de aplicar todos los pasos anteriores es el siguiente:



### Existencia de una componente acotada

Consideremos el punto medio de  $m$  y  $p$ , que denotaremos por  $z_0$ , y sea  $U$  la componente en  $\mathbb{R}^2 - J$  de dicho punto.

Si dicha componente es no acotada existe un camino  $\alpha$  contenido en  $U$  de  $z_0$  a un punto frontera  $w$  de  $E$ ; además sin pérdida de generalidad (gracias al axioma del supremo) tomemos que  $\alpha$  está también contenida en  $E$  y sólo interseca su frontera en  $w$ .

A partir de aquí, tenemos dos casos, o bien  $w$  está por debajo de  $a$  y  $b$  o bien está por encima. Por lo que planteamos casos:

1.  $w$  está por debajo de  $a$  y  $b$

En este caso, al considerar

$$\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mz_0} + \alpha + \widehat{ws}$$

donde  $\widehat{ws}$  es un camino en la frontera de  $E$  que no toca ni a  $a$  ni a  $b$ , obtenemos un camino de  $n$  a  $s$  que no corta a  $J_s$ , en contradicción con el lema del rectángulo cruzado.

2.  $w$  está por encima de  $a$  y  $b$

En este caso, al considerar

$$\overline{sz_0} + \alpha + \widehat{wn}$$

donde  $\widehat{wn}$  es un camino en la frontera de  $E$  que no toca ni a  $a$  ni a  $b$ , obtenemos un camino de  $s$  a  $n$  que no corta a  $J_n$  en contradicción con el lema del rectángulo cruzado.

Por ello, en virtud de la contradicción de suponer lo contrario,  $U$  es una componente acotada, i.e. tenemos existencia.

La siguiente imagen permite visualizar los dos casos considerados, así como el argumento usado en ellos.

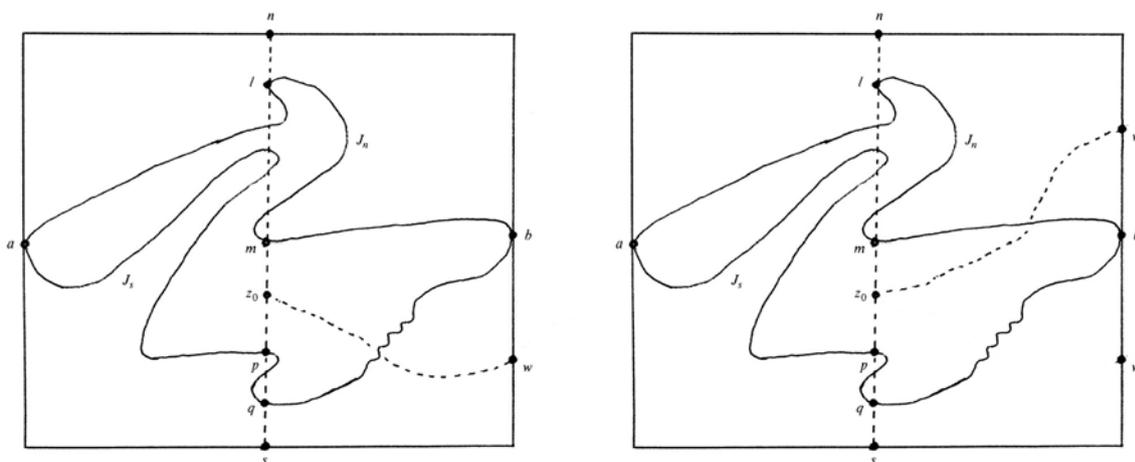


Imagen modificada del artículo de Maehara que ilustra la existencia.

### Unicidad

Usaremos la reducción al absurdo; así sea  $W$  una componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - J$  distinta de  $U$ . Construyamos en primer lugar el camino  $\beta$  de  $n$  a  $s$  dado por

$$\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mp} + \widehat{pq} + \overline{qs}$$

Fácilmente se ve que  $W$  y  $\beta$  no se cortan, ya que los puntos de  $\beta$  o bien son de la curva, de la componente no acotada o de  $U$ .

Ahora, como  $\beta$  es cerrado y no contiene ni a  $a$  ni a  $b$ , tenemos que existen bolas  $V_a$  y  $V_b$  de  $a$  y  $b$  respectivamente que no intersecan a  $\beta$ . Por otro lado, sabemos por el lema de la frontera que  $V_a$  y  $V_b$  sí intersecan a  $W$ , digamos en los puntos  $a_w$  y  $b_w$  respectivamente.

De aquí, sabemos que hay un camino  $\alpha$  de  $a_w$  a  $b_w$  contenido en  $W$ , lo que nos da un camino

$$\overline{aa_w} + \alpha + \overline{b_wb}$$

que no corta a  $\beta$  dado que está contenido en  $W \cup V_a \cup V_b$  disjunto con  $\beta$ . Lo cual contradice el lema del rectángulo cruzado, y por ello, la única componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - J$  es  $U$ .

### 2.5.5. Paso final

Para recapitular, en el paso 1 hemos mostrado que:

En  $\mathbb{R}^2 - J$  existe una única componente no acotada.

Y en el paso 4 que

En  $\mathbb{R}^2 - J$  existe una única componente acotada.

De estas dos afirmaciones se concluye el teorema de Jordan; es decir, que  $\mathbb{R}^2 - J$  tiene exactamente dos componentes conexas. Además, hemos probado en el paso 2 que la frontera de cada una de ellas es  $J$ .

La demostración ha concluido.

□

## 3. Otras dos posibles demostraciones. Esquemas.

En esta sección no pretendemos dar pruebas rigurosas como hemos hecho con la de Maehara, sino dar la idea principal así como un itinerario de los pasos a seguir junto a los puntos cruciales de cada una de estas demostraciones. De esta forma, daremos esquemas de demostración claros para que a la hora de ir a los artículos, estas puedan ser leídas con mayor facilidad al tener en mente el camino que sigue el autor en la demostración.

### 3.1. La demostración de Jordan (revisitada por Hales)

La demostración original de Jordan puede encontrarse en su *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* de 1893. Tras los ataques de Veblen esta prueba cae en el olvido y pasa a ser considerada errónea debido a hipotéticos errores en ella.

En ese contexto, durante la realización de la prueba formal usando la prueba de Thomassen<sup>3</sup>, Hales decide buscar el famoso error de Jordan para indicarlo en la introducción a su artículo. Sin embargo, resulta que lo que Hales encuentra no es más que una prueba correcta. De este hecho, saca su revisión de la prueba de Jordan en [4] donde puede encontrarse con más detalle que el que daremos aquí.

Como curiosidad, cabe indicar que la construcción que realiza Jordan en su prueba permite obtener una demostración de la desigualdad isoperimétrica en general para cualquier curva de la que exista una medida de longitud. La cual se esquematiza también al final de [4].

De este modo, el artículo de Hales sobre la prueba de Jordan es un buen modo de mirar a la prueba original de Jordan, presentada en un lenguaje moderno y fácilmente comprensible.

---

<sup>3</sup>Para una exposición divulgativa por parte de Hales de ello, véase [3].

### 3.1.1. Sobre Jordan



**Camille Jordan** <sup>[14]</sup>

Marie Ennemond Camille Jordan (*Lyon, 5 de enero de 1838 - París, 22 de enero de 1922*) es un matemático francés conocido popularmente por el teorema de la curva de Jordan que aparece en su obra *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*.

A pesar de ello, su importancia no se limita únicamente a la topología y es considerado el fundador de la teoría de grupos finitos (si bien Jordan no trabajaba con grupos abstractos, sino con grupos de permutaciones). Dentro de sus aportaciones conocidas cabe citar la forma canónica de Jordan, el teorema de Jordan-Hölder para series de descomposición de grupos y el teorema de Jordan-Schur.

Finalmente, hemos de destacar también las aportaciones de Jordan al análisis, llegando a generalizar uno de los criterios de convergencia de las series de Fourier.

### 3.1.2. Sobre Hales

Thomas Callister Hales (*4 de junio de 1958-Actualmente*) es un matemático estadounidense que hoy en día trabaja en el programa Langlands, que es un conjunto de conjeturas abiertas propuestas por Robert Langlands de gran importancia en el campo de la teoría de números algebraica, y que es conocido por haber resuelto positivamente la conjetura de Kepler, acerca del apilamiento de esferas en el espacio euclídeo tridimensional,<sup>4</sup> y la conjetura del panel, que afirma que la forma de dividir el plano en zonas de igual área con la mínima longitud es mediante hexágonos colocados como en un panel.

Cabe destacar el trabajo actual de Hales en la realización de pruebas formales y la comprobación mediante computadores de estas como forma de verificar las demostraciones; es de interés la propia formalización realizada por él del teorema de la curva de Jordan, siendo en este trabajo donde se interesó por el hipotético error original de Jordan para descubrir que la prueba de Jordan era en verdad correcta.



**Thomas Callister Hales**

<sup>[15]</sup>

### 3.1.3. Idea principal

La idea principal de la prueba de Jordan se resume simplemente en aproximar la curva de Jordan mediante curvas poligonales simples, y a partir de las propiedades de la aproximación y las curvas poligonales simples obtener la construcción de un punto interior y de toda una serie de conjuntos con los que trabajar.

### 3.1.4. Itinerario de pasos

El itinerario de la prueba de Jordan puede resumirse como sigue:

#### 1. Polígonos

- Construcción de la función de paridad para polígonos y arcos poligonales.
- Propiedades de esta función.

---

<sup>4</sup>La prueba de Hales fue controvertida dado que descansa en un fuerte uso del ordenador para minimizar una función de 150 variables.

- Construcción de un segmento de unión en un polígono.
  - La región impar en polígonos deformados.
2. Entornos de tubos en polígonos.
    - Construcción de tubos y entornos de tubos “genéricos”.
    - Tres propiedades de las componentes del complemento de un entorno de tubos “genérico”.
  3. La construcción de la aproximación poligonal a la curva de Jordan.
  4. Construcción de un punto interior.
  5. Construcción del interior y el exterior.

Aquí puede verse como una gran cantidad de trabajo se dedica a cuestiones relativas a polígonos para después, una vez desarrollada la aproximación poligonal, aplicarlas directamente a la construcción del interior y exterior de la curva de Jordan.

### 3.1.5. Esquema de la demostración. Algunos detalles.

La demostración de Jordan comienza analizando la función de paridad para polígonos y arcos poligonales, para así poder construir un segmento de paridad impar respecto a un polígono cualquiera. A posteriori, pasa a analizar como varía la paridad de los puntos respecto a un polígono cuando este se deforma en otro polígono, bajo ciertas condiciones dadas. Por otro lado, después analiza entornos de tubos en los polígonos, analizando distintas propiedades de estas componentes en el complemento de estos bajo hipótesis razonables. Finalmente como último preparativo de la demostración, construye una aproximación poligonal “buena” de la curva de Jordan.

Una vez tenidos estos preparativos entre manos, toma una serie de aproximaciones poligonales suficientemente cercanas. En cada una de estas, usando el segmento de paridad impar construye un punto interior, y además usando el análisis de la deformación de los polígonos garantizará que ciertas componentes del entorno de tubos de cada aproximación convergen al interior y exterior deseados de la curva de Jordan. Una vez mostrado esto, demuestra el teorema en general.

A modo de destacar tres puntos importantes, nos centraremos en:

- La función de paridad para polígonos.
- La aproximación poligonal.
- Las propiedades de las aproximaciones del interior y exterior de la curva de Jordan.

Ahora bien esta elección puede ser bastante arbitraria, y por ello, hemos de recordar que buscamos solamente motivar la demostración de Jordan mostrando como funciona la maquinaria que pensó Jordan y de ese modo observar la elegancia subyacente al razonamiento de Jordan en ciertos casos concretos.

#### ***La función de paridad para polígonos.***

Consideremos una curva de Jordan  $J$  y un punto  $p$  en  $\mathbb{R}^2 - J$ . Queremos contar el número de veces que hemos de atravesar la curva  $J$  para alejarnos de ella, dándose que intuitivamente el punto estará dentro si hemos de atravesar la curva un número impar de veces y fuera si hemos tenido que atravesarla un número par de veces, ya que cada vez que atravesamos la curva pasamos de estar dentro a estar fuera y viceversa.

De este modo, la función de paridad de una curva  $J$  es una función  $\pi_J : \mathbb{R}^2 - J \rightarrow \{0, 1\}$  donde para cada  $p \in \mathbb{R}^2 - J$ ,  $\pi_J(p)$  es igual a 0 o 1 según una semirrecta con origen en  $p$  cruza un número par o impar a  $J$ .

Lamentablemente esta definición peca de no ser clara en general, al no estar claro por un lado qué es un punto de traspaso y por otro lado la finitud de tal conjunto de puntos. De esta forma, Jordan se limita al caso poligonal, donde podemos realizar las dos siguientes operaciones

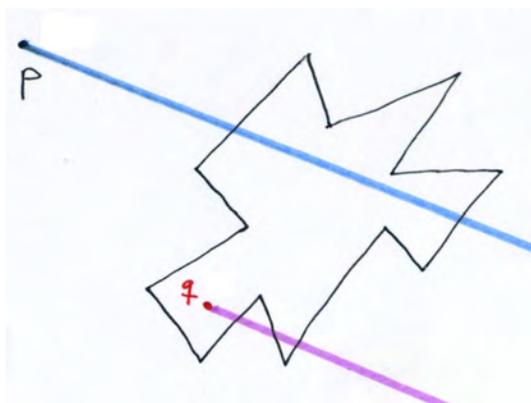
- Podemos modificar ligeramente  $L$  de modo que no contenga ningún segmento ni vértice de  $J$ .
- Bajo la hipótesis de que  $L$  no contiene ni segmentos ni vértices de  $J$ , los puntos de traspaso resultan ser precisamente los puntos de intersección y además dicho conjunto es finito al ser  $J$  unión finita de segmentos y estar cada uno de esos puntos en un segmento distinto.

Y así definir sin ambigüedades ni dificultades la función de paridad de un polígono. Ciertamente es que pueden tomarse definiciones más elaboradas de la función  $\pi_J$  cuando  $J$  es poligonal, sin embargo, por simplicidad usaremos la anterior. En cualquier caso, es fácil probar las siguientes propiedades:

- $\pi_J$  está bien definida, viendo su independencia respecto de la semirrecta tomada.
- $\pi_J$  es localmente constante, analizando como el número de intersecciones se conservan para pequeños movimientos de la semirrecta.
- $\pi_J$  es suprayectiva, considerando la paridad de los puntos de una recta que corta  $J$ .

De las cuales es inmediato que hay al menos dos componentes, sin embargo, no se deduce en absoluto que sean solamente dos. Sin embargo, Jordan solamente usa el primer hecho.

A modo de ejemplificar la función de paridad con una imagen, veamos el siguiente dibujo



donde podemos apreciar como para el punto exterior  $p$  la paridad toma el valor 0 y para el punto interior  $q$  toma el valor 1.

**La aproximación poligonal.**

Antes de comenzar,<sup>5</sup> por simplicidad usaremos

$$(\mathbb{S}^1, d_u)$$

con  $d_u$  la distancia inducida por el plano. Ahora, dados  $x = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  e  $y = (\cos \beta, \sin \beta)$  en  $\mathbb{S}^1$  que verifican  $d(x, y) < 2$ , o sea se, puntos que no sean diametralmente opuestos, podemos considerar el arco de circunferencia más corto entre ellos, que denotaremos por

$$[x, y]$$

sin ningún tipo de ambigüedad, lo cual no pasa cuando  $x$  e  $y$  son diametralmente opuestos.

---

<sup>5</sup>Hay que indicar que Hales en su [4] usa una notación distinta, pero en lo que respecta a las ideas no hay diferencia alguna.

De este modo, sea  $J$  nuestra curva de Jordan la cual se halla parametrizada por el homeomorfismo  $f_J : (\mathbb{S}^1, d_u) \rightarrow (J, d_u)$ ; queremos mostrar que para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  existe una curva de Jordan poligonal  $P_{J,\varepsilon}$ , dada por un homeomorfismo  $\rho_{J,\varepsilon} : \mathbb{S}^1 \rightarrow P_{J,\varepsilon}$ , tal que para cada  $x \in \mathbb{S}^1$ ,

$$d_u(\rho_{J,\varepsilon}(x), f_J(x)) < \varepsilon$$

Fijémonos que por la continuidad uniforme de  $f_J$  y la de  $f_J^{-1}$  tenemos que para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , hay  $\delta_J(\varepsilon), \delta'_J(\varepsilon) \in (0, 2)$  tales que para todo  $x, y \in \mathbb{S}^1$ ,

$$\text{si } d_u(x, y) < \delta_J(\varepsilon), \text{ entonces } d_u(f_J(x), f_J(y)) < \varepsilon$$

y,

$$\text{si } d_u(f_J(x), f_J(y)) < \delta'_J(\varepsilon), \text{ entonces } d_u(x, y) < \varepsilon.$$

Y de esa forma, si  $d_u(f_J(x), f_J(y)) < \delta'_J(\delta_J(\varepsilon))$ , entonces para cada  $z \in [x, y]$ ,<sup>6</sup>

$$d_u(f_J(x), f_J(z)) < \varepsilon$$

A partir de los hechos anteriores, simplemente hemos de seguir los siguientes pasos<sup>7</sup> para construir  $P_{J,\varepsilon}$  y  $\rho_{J,\varepsilon}$

1. Se toma

$$N_{J,\varepsilon} = \left\lceil \frac{1}{\min\{\delta_J(\frac{\varepsilon}{2}), \delta'_J(\delta_J(\frac{\varepsilon}{2}))\}} + 1 \right\rceil$$

Y se construye  $L_{J,\varepsilon} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tomando para  $k \in \{0, \dots, N_{J,\varepsilon} - 1\}$ ,

$$L_{J,\varepsilon} \left( \cos 2\pi \frac{k}{N_{J,\varepsilon}}, \sin 2\pi \frac{k}{N_{J,\varepsilon}} \right) = f_J \left( \cos 2\pi \frac{k}{N_{J,\varepsilon}}, \sin 2\pi \frac{k}{N_{J,\varepsilon}} \right)$$

e interpolando linealmente.

De este modo, por la desigualdad triangular,  $ImL_{J,\varepsilon}$  es una curva poligonal cerrada, no necesariamente simple, tal que para cada  $x \in \mathbb{S}^1$ , su parametrización  $L_{J,\varepsilon}$  verifica

$$d_u(L_{J,\varepsilon}(x), f_J(x)) < \varepsilon$$

2. Se toma

$$m_{J,\varepsilon} = \frac{1}{2} \min\left\{ \varepsilon, \delta'_J\left(\delta_J\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \right\}$$

Y se considera

$$R_{J,\varepsilon} = L_{J,m_{J,\varepsilon}}$$

Ahora, además de que para cada  $x \in \mathbb{S}^1$ ,

$$d_u(R_{J,\varepsilon}(x), f_J(x)) < \varepsilon,$$

se cumple que si para  $x, y \in \mathbb{S}^1$  se da  $R_{J,\varepsilon}(x) = R_{J,\varepsilon}(y)$ , entonces para cada  $z \in [x, y]$

$$d_u(R_{J,\varepsilon}(x), f_J(z)) < \varepsilon$$

(En este caso puede considerarse  $[x, y]$  dado que  $d_u(x, y) < \delta_J(\frac{\varepsilon}{2}) < 2$  al darse  $d_u(J(t), J(t')) < \delta'_J(\delta_J(\frac{\varepsilon}{2}))$ .)

<sup>6</sup>Hay que recordar que  $[x, y]$  está bien definido dado que  $d(x, y) < \delta(\varepsilon) < 2$ .

<sup>7</sup>De los cuales dejaremos los detalles de las deducciones para el lector.

3. Dado que hay dos tipos de autointersecciones de la curva poligonal  $ImR_{J,\varepsilon}$ , o bien dos segmentos se intersecan en un punto o bien en un segmento, se da que, al constar  $ImR_{J,\varepsilon}$  de un número finito de segmentos, sólo hay un número finito de autointersecciones de  $ImR_{J,\varepsilon}$ .

Con la consideración anterior en mente, se construye  $Q_{J,\varepsilon} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a partir de  $R_{J,\varepsilon}$  tomando una autointersección de  $ImR_{J,\varepsilon}$  dada por

$$R_{J,\varepsilon}(x) = R_{J,\varepsilon}(y)$$

Y a partir de ahí, se define  $R_{J,\varepsilon}^{(1)}$  como la función dada por

$$R_{J,\varepsilon}^{(1)}(z) = \begin{cases} R_{J,\varepsilon}(z) & \text{si } z \notin [x, y] \\ R_{J,\varepsilon}(x) & \text{si } z \in [x, y] \end{cases}$$

De este modo,  $ImR_{J,\varepsilon}^{(1)}$  es una curva poligonal con una autointersección menos que  $ImR_{J,\varepsilon}$  y procediendo recursivamente sobre la nueva función que se obtiene en cada paso, llegaremos a una función  $R_{J,\varepsilon}^{(n)}$ , tal que  $ImR_{J,\varepsilon}^{(n)}$  no posee autointersecciones.

Tomemos esa  $R_{J,\varepsilon}^{(n)}$  como  $Q_{J,\varepsilon}$ . Aquí se verifica que  $ImQ_{J,\varepsilon}$  es una curva poligonal cerrada simple buena para aproximar  $J$ , que verifica que para cada  $x \in \mathbb{S}^1$ ,

$$d_u(Q_{J,\varepsilon}(x), f_J(x)) < \varepsilon$$

Ahora, la parametrización  $Q_{J,\varepsilon}$  es mala y por ello todavía no hemos terminado.

4. Finalmente, se construye  $P_{J,\varepsilon}$  y  $\rho_{J,\varepsilon}$  a partir de  $ImQ_{J,\varepsilon}$  y de modificar ligeramente la parametrización dada por  $Q_{J,\varepsilon}$ .

Luego, concluye nuestra construcción más o menos detallada de la aproximación poligonal.

***Las propiedades de las aproximaciones del interior y exterior de la curva de Jordan.***

Usando la aproximación poligonal para  $\varepsilon$  suficientemente pequeños, junto con otros resultados acerca de curvas poligonales de Jordan,<sup>8</sup> Jordan construye dos sucesiones de subconjuntos abiertos no vacíos conexos  $\{U_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{U_\infty^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  verificando:

- I) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_0^n \cap U_\infty^n = \emptyset$ .
- II) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $\alpha \in \{0, \infty\}$ ,  $U_\alpha^n \cap J = \emptyset$ .
- III) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $\alpha \in \{0, \infty\}$ ,  $U_\alpha^n \subseteq U_\alpha^{n+1}$ .
- IV)

$$\mathbb{R}^2 - J \subseteq \bigcup_{n,\alpha} U_\alpha^n$$

Las cuales no son más que un modo de aproximar conjuntistamente el interior y el exterior de la curva de Jordan considerada.

A partir de estas sucesiones, que verifiquen las propiedades anteriores, tenemos que se verifica el teorema de la curva de Jordan. Para ello, para  $\alpha \in \{0, \infty\}$  definamos

$$V_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_\alpha^n$$

---

<sup>8</sup>En concreto, explotando las propiedades de los entornos de tubos alrededor de la aproximación poligonal.

y veamos que  $V_0$  y  $V_\infty$  son las dos componentes buscadas.

En primer lugar, para todo  $\alpha \in \{0, \infty\}$ ,  $V_\alpha$  es conexo dado que es unión de conexos con la menos un punto en común por III) y es abierto al ser unión de abiertos.

En segundo lugar,  $V_0$  y  $V_\infty$  son disjuntos, dado que sino tendríamos que habría  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $U_0^n \cap U_\infty^m \neq \emptyset$ , y así por III) nos daría que  $U_0^{\max\{n,m\}} \cap U_\infty^{\max\{n,m\}} \neq \emptyset$  incumpliendo I).

Y finalmente,  $V_0 \cup V_\infty = \mathbb{R}^2 - J$  dado que por IV)  $V_0 \cup V_\infty \supseteq \mathbb{R}^2 - J$  y por II)  $V_0 \cup V_\infty \subseteq \mathbb{R}^2 - J$ .

De modo que concluimos el teorema de Jordan, y además sabemos aproximar el interior y el exterior de la curva de Jordan mediante las aproximaciones  $U_0^n$  y  $U_\infty^n$  obtenidas directamente a partir de las aproximaciones poligonales construidas a la curva.

Por último, recordar que la demostración completa junto con el resto de los detalles se encuentran en [4] y que los detalles aquí dados sólo buscan servir de introducción a la demostración de Jordan, motivando su lectura.

## 3.2. La demostración de Thomassen

La demostración de Thomassen se encuentra en [6] y data de 1992. Un punto importante de esta demostración es el uso de técnicas perteneciente a la teoría de grafos y a la topología, lo cual hace que a pesar del uso de argumentos elaborados no sean técnicamente complejos. Si bien es curioso que Thomassen siguiendo la tradición de Peano, no utiliza dibujos en su artículo para enfatizar que las pruebas son rigurosas.

Un punto importante a considerar de [6] es que no va dirigido únicamente a probar el teorema de la curva Jordan, sino que busca demostrar el teorema de clasificación de superficies. De modo que el teorema de Jordan es sólo la primera parte del artículo, siendo el resto pertenecientes a su generalización el teorema de Jordan-Schönflies<sup>9</sup>, su aplicación al teorema de triangulación de superficies y una prueba combinatoria del teorema de clasificación de superficies aplicando este último teorema.

Por ello, una buena lectura para aprender una demostración del teorema de clasificación de superficies está constituida por este artículo, [6].

### 3.2.1. Sobre Thomassen



**Carsten Thomassen** [16]

Carsten Thomassen (*Grindsted, 22 de agosto de 1948-Actualmente*) es un matemático danés que actualmente ejerce de profesor en la *Universidad Técnica de Dinamarca*, donde se encuentra desde 1981, dedicado principalmente al campo de la teoría de grafos, y actualmente editor de diversas revistas de matemática discreta como *Journal of Graph Theory* y *European Journal of Combinatorics*.

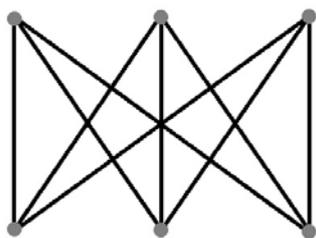
Dentro de su desarrollo profesional, defendió su tesis *Paths and Cycles in Graphs* en la *Universidad de Waterloo* (Canadá) bajo la dirección de Daniel Haven Younger en 1976. Y es de destacar tanto su nombramiento como miembro de la *Real Academia Danesa de Ciencia y Letras* en 1990, como el hecho de ser uno de los 250 matemáticos más citados actualmente.

### 3.2.2. Idea principal

La idea principal de la demostración de Thomassen es darse cuenta que la no planaridad de  $K_{3,3}$  es equivalente al teorema de la curva de Jordan, en el sentido que una curva de Jordan que no desconecta el plano o una que los desconecta en más de dos componentes conexas permiten construir copias de  $K_{3,3}$  en el plano.

<sup>9</sup>Al final citamos este teorema entre las posible generalizaciones en 4.3.

Para aquellos sin una base de teoría de grafos, indiquemos que el grafo  $K_{3,3}$  es el grafo dado por dos filas de tres vértices de modo que cada vértice de una fila esté unido a todos los de la otra fila.

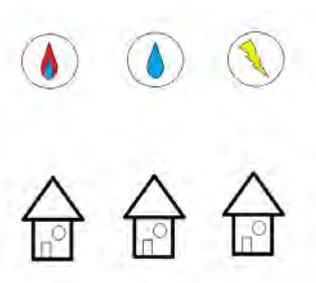


Un grafo  $K_{3,3}$ .

Y cuando decimos que no es planar, o nos referimos a su no planaridad, estamos refiriéndonos a que es imposible representar este grafo en el plano usando puntos para los vértices y arcos para las aristas sin que haya intersecciones entre algunos arcos, i.e. que no lo podemos dibujar en el plano sin que aristas distintas se crucen.

Un modo de visualizar todo este aspecto de forma fácil es considerar el siguiente problema clásico:

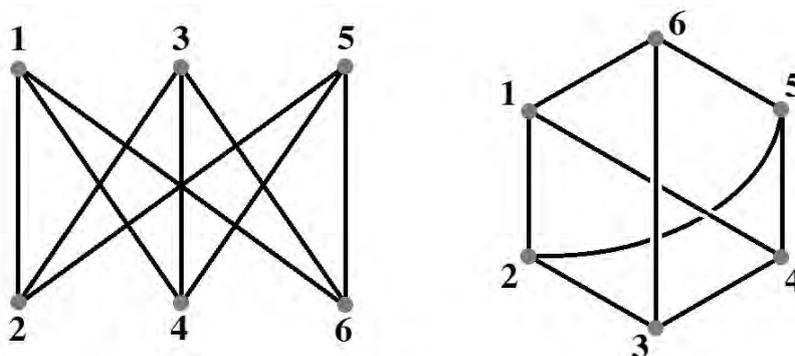
Un vecindario presenta el siguiente aspecto



con una hilera de casas y una hilera de plantas de servicios que surten gas, agua y electricidad. Dado que los vecinos se odian, es necesario unir cada casa a cada una de las plantas de servicios de modo que ningún par de caminos se corte. ¿Es posible realizarlo?

De este modo, es fácil ver que decir que  $K_{3,3}$  es no planar significa que no hay solución al problema anterior. Como curiosidad, hay que notar que al grafo  $K_{3,3}$  se le llama también grafo de servicios o utilidades –siendo este último nombre consecuencia de traducciones del inglés–.

Es importante ver que el grafo  $K_{3,3}$  se representa también como un hexágono con tres cuerdas cruzadas en la siguiente manera:



### 3.2.3. Itinerario de pasos

El itinerario que se nos presenta al seguir la prueba de Thomassen es el siguiente:

1. Análisis de casos poligonales.
  - Lema de la conexión por arcos poligonales.
  - Lema de la planaridad poligonal.
  - Teorema de la curva poligonal de Jordan.
  - Pequeña generalización del teorema de la curva poligonal de Jordan.
2.  $K_{3,3}$  no es planar.
3. Hay por lo menos dos componentes.
4. Grafos 2-conexos
  - Propiedad de un subgrafo 2-conexo de un grafo 2-conexo.
  - Número de componentes del complemento de un 2-grafo plano poligonal en el plano.
  - Componente no acotada de una unión de 2-grafos poligonales.
5. Conexión del complemento de un arco en el plano.
6. No hay más de dos componentes.

Donde se aprecia claramente y a primera vista el uso de la teoría de grafos que se realiza.

### 3.2.4. Esquema de la demostración. Algunos detalles.

La demostración de Thomassen comienza estableciendo que la conexión y la planaridad puede ser considerada trabajando con arcos poligonales solamente. A partir de ello, pasa a demostrar el teorema de la curva de Jordan para el caso poligonal –donde usa también la función de paridad– para así demostrar el punto clave, que  $K_{3,3}$  no es planar.

Desde ahí, establece primero por reducción al absurdo que cualquier curva de Jordan desconecta el plano<sup>10</sup> mostrando que si no lo hiciera, entonces  $K_{3,3}$  sería planar. Y una vez establecido esto, tras demostrar que los arcos no desconectan el espacio usando teoría de grafos y una construcción auxiliar, muestra que el complemento de una curva de Jordan en el plano tiene dos componentes conexas a lo sumo, dado que sino  $K_{3,3}$  sería planar.

Una vez esquematizado el sentido de la prueba, centrémonos en los siguientes puntos fundamentales:

1. Hay por lo menos dos componentes.
2. No hay más de dos componentes.

Que por un lado nos mostraran la belleza y elegancia de la prueba de Thomassen y por otro lado el poder de la teoría de grafos topológica. Por otro lado, en estos puntos es importante darse cuenta de que es crucial el haber mostrado los siguientes hechos

- $K_{3,3}$  no es planar.
- Los arcos no desconectan el plano.

---

<sup>10</sup>Entiéndase desconectar el plano como que el complemento no es conexo.

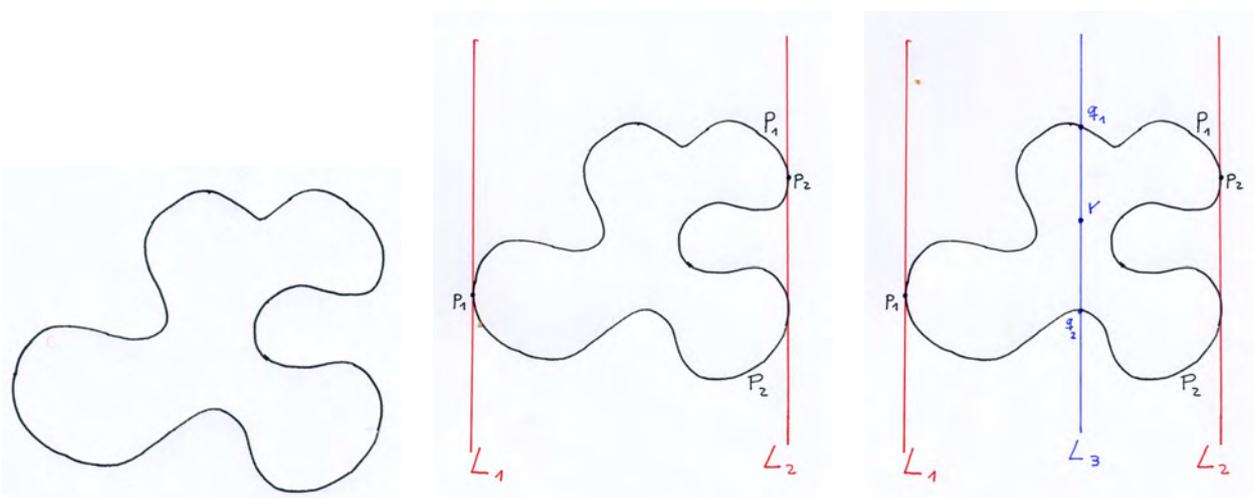
Siendo el segundo solamente crucial para mostrar que no hay más de dos componentes.

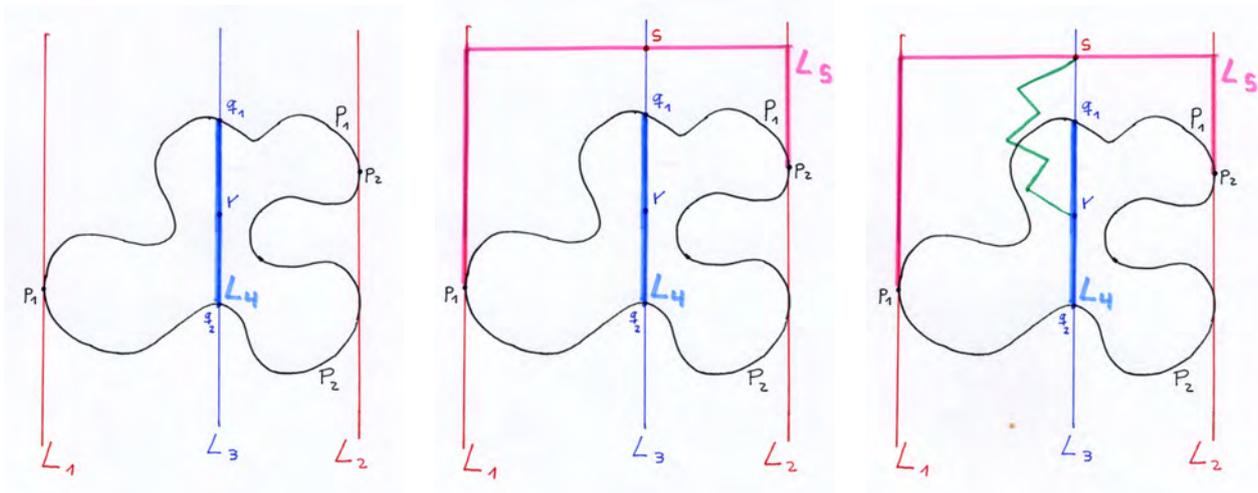
**Hay por lo menos dos componentes.**

Dada una curva de Jordan  $J$  que no desconecta el plano, vamos a mostrar como construir un grafo  $K_{3,3}$  plano. Para ello, simplemente hemos de seguir los pasos:

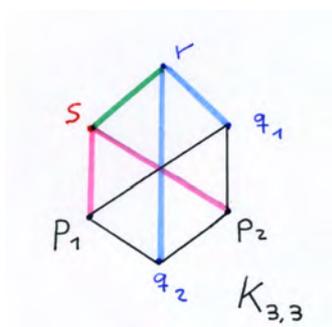
1. Consideremos la línea vertical  $L_1$  que interseca a  $J$  de modo que  $J$  se halle completamente contenida en el semiplano derecho. Y de la intersección tomemos el punto  $p_1$  caracterizado por ser el punto con mayor coordenada vertical.
2. Análogamente al paso anterior, consideremos  $L_2$  y  $p_2$  solamente considerando ahora que  $J$  quede en el semiplano izquierdo en vez de en el derecho.
3. Claramente  $p_1$  y  $p_2$  dividen a la curva de Jordan en dos arcos, uno superior que llamaremos  $P_1$  y otro inferior que llamaremos  $P_2$ .
4. Tomemos  $L_3$  una línea vertical entre  $L_1$  y  $L_2$ . Y como  $L_3$  interseca a  $P_1$  y  $P_2$ , siendo las intersecciones compactas, consideremos  $q_1 \in P_1 \cap L_3$  con la menor coordenada vertical y  $q_2 \in P_2 \cap L_3$  con la mayor coordenada vertical menor que la de  $q_1$ .
5. Llamemos  $L_4$  al segmento que une  $q_1$  y  $q_2$ , por lo anterior  $L_4$  sólo corta a  $J$  en sus extremos. Por otro lado, llamemos  $r$  el punto medio de este intervalo.
6. Consideremos un segmento horizontal de  $L_1$  a  $L_2$  por encima de  $J$ , y llamemos  $L_5$  a la unión de dicho segmento con los segmentos verticales que van de sus extremos a  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente contenidos en  $L_1$  y  $L_2$ . De esto,  $L_5$  sólo interseca a  $J$  en  $p_1$  y en  $p_2$ . Además, llamemos  $s$  al punto de intersección de  $L_3$  y  $L_5$ .
7. Bajo hipótesis de que  $J$  no desconecte el espacio, podemos considerar un arco poligonal  $L_6$  que una  $r$  y  $s$  obteniendo el grafo plano  $K_{3,3}$  deseado.

Gráficamente, esta serie de pasos se resume como:





Donde al final, dibujando un diagrama, podemos ver que obtenemos  $K_{3,3}$  junto al absurdo deseado.



**No hay más de dos componentes.**

Dada una curva de Jordan  $J$  que divide el plano en tres o más componentes, vamos a mostrar como construir un grafo  $K_{3,3}$  plano.

Para ello, hay que fijarse en el hecho de que los arcos no desconecten el plano puede ser usado para mostrar que el conjunto de puntos de la curva de Jordan que pueden ser unidos mediante un arco poligonal a un punto de una región dada de modo que el arco poligonal sólo tenga en común con  $J$  el punto de partida, es denso en  $J$ .

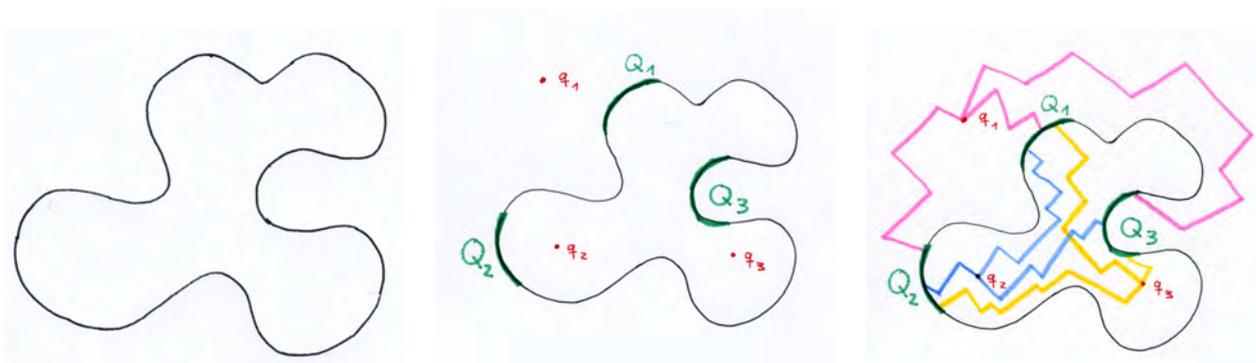
Una vez constatado esto, sólo basta aplicar la siguiente construcción:

1. Consideremos  $q_1, q_2$  y  $q_3$  puntos en tres distintas componentes de  $\mathbb{R}^2 - J$ .
2. Consideremos  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  tres subarcos disjuntos de la curva de Jordan  $J$ .
3. Para cada  $i$ , consideremos los arcos poligonales  $L_{i,1}, L_{i,2}$  y  $L_{i,3}$  que unen cada  $q_i$  con  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  respectivamente. Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que
  - Para todo  $j, L_{i,j}$  intersecciona  $J$  solamente en un punto de  $Q_j$ .
  - Cada par de arcos  $L_{i,1}, L_{i,2}$  y  $L_{i,3}$  tienen en común solamente el punto  $q_i$ .

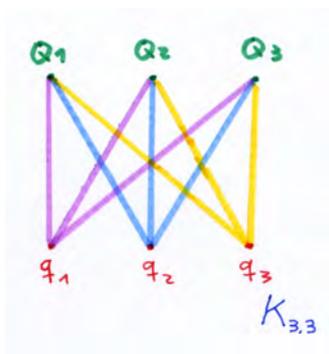
De lo que cada  $L_{i,j}$  tiene todos sus puntos en la componente que contiene a  $q_i$  excepto uno que está en  $Q_j$ .

4. Para cada  $j$ , si es necesario alargemos  $L_{1,j}, L_{2,j}$  y  $L_{3,j}$  con subarcos de  $Q_j$ , se modo que lleguen a un punto común de  $Q_j$  verificando que ese sea el único punto en común que tengan. Fácilmente se comprueba que hemos obtenido un grafo  $K_{3,3}$  con vértices  $q_1, q_2$  y  $q_3$  y sus otros tres vértices en  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  respectivamente.

De forma visual, esta serie de pasos se resume como:



Donde al final, dibujando un diagrama de uniones, podemos ver que obtenemos el grafo



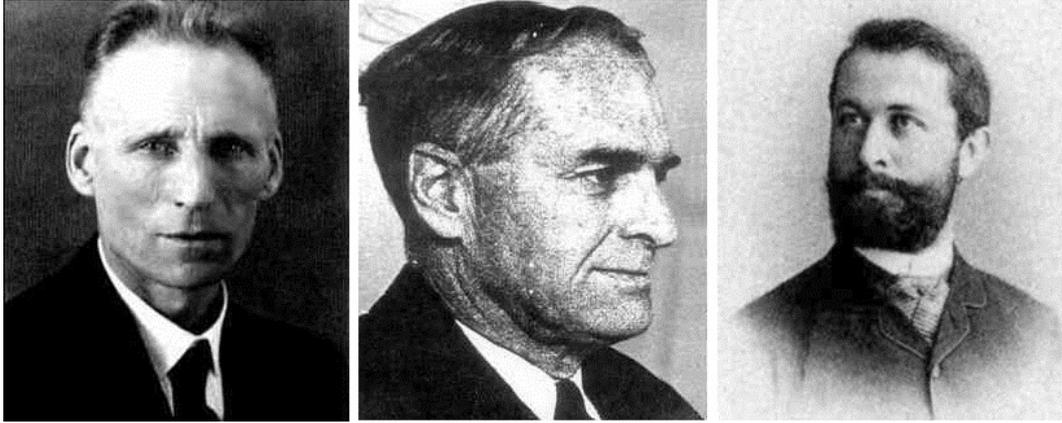
que es justo  $K_{3,3}$ , que por ser no planar nos da el absurdo deseado para concluir que hay a lo sumo dos componentes.

Finalmente, recordemos que la prueba completa y el resto de los detalles se encuentran en [6] y que los detalles aquí dados sólo buscan motivar y servir de introducción a la propia demostración de Thomassen, no como sustituto.

#### 4. ¿Y en general?

A la hora de generalizar el teorema de la curva de Jordan hay dos direcciones. La primera consiste en buscar enunciados equivalentes en las dimensiones superiores donde se obtienen el teorema de separación de Jordan-Brouwer y de separación de Alexander. Y la segunda mirando a la estructura topológica del interior definido por una curva de Jordan, que resulta ser homeomorfo al interior de un círculo, y se traduce en lo que se llama teorema de Jordan-Scöfnlies.

Debido a la brevedad del presente trabajo simplemente mostraremos los enunciados de estos teoremas con algunos comentarios y el enunciado particular para tres dimensiones donde sea posible.



Luitzen Egbertus Jan Brouwer <sup>[10]</sup>, James Waddell Alexander <sup>[17]</sup> y Arthur Moritz Schönflies <sup>[18]</sup>

#### 4.1. Teorema de separación de Jordan-Brouwer

Al pasar a dimensiones superiores,  $\mathbb{R}^2$  se convierte en  $\mathbb{R}^n$ , y el análogo de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^n$  es  $S^{n-1}$ . De este modo, sustituyendo cada objeto que aparece en el teorema de la curva de Jordan por su análogo en dimensiones superiores obtenemos

**Teorema 4.1** (Separación de Jordan-Brouwer). *Sea  $S \subset (\mathbb{R}^n, d_u)$  y  $n \geq 2$ . Si  $S$  es homeomorfo a  $S^{n-1}$ , entonces  $\mathbb{R}^n - S$  tiene exactamente dos componentes conexas.*

El cual, al particularizarlo a tres dimensiones, pasa a

**Teorema 4.2** (Separación de Jordan-Brouwer para superficies). *Sea  $S \subset (\mathbb{R}^3, d_u)$ . Si  $S$  es homeomorfo a una esfera, entonces  $\mathbb{R}^3 - S$  tiene exactamente dos componentes conexas.*

#### 4.2. Teorema de separación de Alexander

A la hora de pensar en el teorema de la curva de Jordan en dimensiones superiores, cabe darse cuenta de que una curva de Jordan no es más que una subvariedad<sup>11</sup> compacta y conexa de dimensión 1 en  $\mathbb{R}^2$ . Así, con esta reformulación al realizar la sustitución de antes se llega al teorema de Alexander, que responde afirmativamente a nuestra cuestión.

**Teorema 4.3** (Separación de Alexander). *Sea  $S \subset (\mathbb{R}^n, d_u)$  y  $n \geq 2$ . Si  $S$  es una subvariedad compacta y conexa de dimensión  $n - 1$ , entonces  $\mathbb{R}^n - S$  tiene exactamente dos componentes conexas.*

El cual, al particularizarlo a tres dimensiones, pasa a

**Teorema 4.4** (Separación de Alexander para superficies). *Sea  $S \subset (\mathbb{R}^3, d_u)$ . Si  $S$  es una superficie compacta y conexa, entonces  $\mathbb{R}^3 - S$  tiene exactamente dos componentes conexas.*

#### 4.3. Teorema de Jordan-Schönflies

La última extensión del teorema de la curva de Jordan que vamos a ver responde a una pregunta sencilla: ¿es homeomorfo el interior de una curva de Jordan a un círculo? Y la respuesta a esta pregunta, cuyo análogo en dimensiones superiores es falso<sup>12</sup>, es afirmativa para la curva de Jordan, dándose no sólo que sea homeomorfismo, sino que dicho homeomorfismo puede verse como una extensión del homeomorfismo entre la circunferencia y nuestra curva de Jordan.

<sup>11</sup>Una subvariedad es el concepto general de curva y superficie cuando se trabaja con dimensiones superiores.

<sup>12</sup>La esfera de Alexander es un contraejemplo de ello en tres dimensiones.

Así, el teorema de Jordan-Schönflies se traduce en

**Teorema 4.5** (Jordan-Schönflies). *Sea  $J \subset (\mathbb{R}^2, d_u)$ . Si  $J$  es una curva de Jordan y  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow J$  uno de los homeomorfismos entre la circunferencia y ella, entonces existe un homeomorfismo*

$$\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

*que es extensión del anterior, i.e.  $\bar{f}_{\mathbb{S}^1} = f$ . En otras palabras, todo homeomorfismo entre dos curvas de Jordan puede extenderse a un homeomorfismo del plano en sí mismo.*

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [6]

## 5. Bibliografía

### Referencias

#### Libros

- [1] M. Aigner y G.M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Fourth Edition. Springer Verlag, 2010.
- [2] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, Inc. 2004.

#### Artículos

- [3] T.C. Hales. The Jordan Curve Theorem, Formally and Informally. *The American Mathematical Monthly* **114** (10): 882–894, 2007.
- [4] T.C. Hales. Jordan's Proof of the Jordan Curve Theorem *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric* **10** (23), 2007.
- [5] R. Maehara. The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem. *The American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America)* **91** (10): 641–643, 1984.
- [6] C. Thomassen. The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *American Mathematical Monthly* **99** (2): 116–130, 1992.

#### Páginas WEB

- [7] A. Ranicki, Colección de artículos sobre el teorema de Jordan y el teorema de clasificación de superficies <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/jordan/>
- [8] The MacTutor History of Mathematics archive <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>
- [9] Wikipedia, The Free Encyclopedia. <http://www.wikipedia.org/>

## **Imágenes**

- [10] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BigPictures/Brouwer.jpeg>
- [11] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/98/Emanuel\\_Sperner.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/98/Emanuel_Sperner.jpg)
- [12] <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Urysohn.jpeg>
- [13] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Tietze.jpeg>
- [14] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Jordan\\_4.jpeg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Jordan_4.jpeg)
- [15] <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/54/Halescropped.jpg>
- [16] <http://lww.mat.dtu.dk/pictures/C.Thomassen.jpg>
- [17] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Alexander.jpeg>
- [18] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Schonflies.jpeg>