Torres de Hanoi[1]

Amaia Gil Lerchundi, Ester Landa Cillero, Oihane Ruiz Díaz y Josué Tonelli Cueto

Índice

[1]Trabajo realizado para el curso "Combinatoria" de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) durante el curso académico 2011/12. El curso fue impartido por la profesora Larraitz Aranburu Laka. Modficaciones menores pueden haber ocurrido sobre el original de este documento para garantizar su correctitud.

0. Descripción del trabajo

El presente trabajo responde a todas las preguntas planteadas en la primera sección, donde también planteamos otros resultados de conteo combinatorio como el número de movimientos a derecha e izquierda en el modelo lineal o el número de veces que una pieza dada se mueve de una varilla determinada a otra.

Además, en la segunda sección tratamos la relación del juego de las torres de Hanoi con el juego icosiano para un hipercubo dando con ello una demostración alternativa del número de movimientos mínimo necesario para resolver el juego.

Finalmente, se da la bibliografía donde se muestran tanto los libros y artículos que hemos usado como referencias para la realización del trabajo, así como las fuentes de las imágenes no propias.

1. Torres de Hanoi

El juego de las torres de Hanoi, o como también es conocido, de las torres de Brahma o el problema del fin del mundo, es un juego de sencillas normas del cual vamos a mirar sus historia, encontrar una solución óptima y a partir de ella realizar diversos conteos combinatorios.

1.1. Historia

Édouard Lucas [8]

En el año 1883 Édouard Lucas publicó un juego o puzzle matemático llamado *La Torre de Hanoi* bajo la identidad inventada del profesor mandarín de Siam N. Claus de la universidad Li-Sou-Stian, siendo tanto el apellido como la universidad anagramas del propio apellido y universidad donde trabajaba Lucas, la universidad de Saint –Louis.

En las instrucciones que acompañaban al juego, Lucas incluyó una referencia a los brahmanes, sacerdotes que adoran al dios Brahma, de Benarés[2] y su templo, considerada la ciudad más antigua del mundo. Pero fue un año después, 1884, cuando Henri De Parville, pionero de la ciencia ficción en Europa, publicó su artículo en la revista *La Nature* desarollando por completo la leyenda que ha acompañado al juego hasta nuestros tiempos:

Cuenta la leyenda que en Benarés, durante el reinado del Emperador Fo Hi[3], existía un templo con una cúpula que marcaba el centro del mundo. Debajo de la cúpula yacía una base de bronce, en donde se encontraban acomodadas tres agujas de diamante, cada una del grueso del cuerpo de una abeja y de una altura de unos cincuenta centímetros aproximadamente. En una de esas agujas, en el comienzo de los tiempos, Brahma, dios hindú de la creación, colocó sesenta y cuatro discos de oro puro, el mayor descansando sobre la base de bronce, y el resto decreciendo en tamaño conforme se va ascendiendo.

Día y noche, incesantemente, los sacerdotes del templo se turnaban el trabajo de mover los discos de una aguja a otra de acuerdo con las leyes inmutables impuestas por Brahma, que requerían que siempre hubiese algún sacerdote trabajando, que no se moviese más de un disco a la vez y que debían colocar cada disco en alguna de las agujas de modo que nunca cubriese a un disco de radio menor. Cuando los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Brahma los colocó a otra aguja, el templo y los sacerdotes se convertirán en polvo, y junto con ellos el mundo desaparecerá.

[2] Una de las siete ciudades sagradas del hinduismo en India

[3] Primer emperador de China, aproximadamente del 3300 a.C. al 3400 a.C.

Como más adelante veremos el número de movimientos para mover los sesenta y cuatro por lo que los monjes necesitarán una cantidad de

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \cong 2 \cdot 10^{19}$$

movimientos. Siendo optimistas, y suponiendo que los monjes mueven un disco por segundo les costaría pasar la torre de la varilla inicial a la final aproximadamente

$$585 \cdot 10^{9} \text{ años,}$$

esto es, 585 mil millones de años.

Para hacernos una idea de lo que esto supone, tomando que la edad actual del universo está estimada en 13.700 millones de años [5] lo que haciendo un cociente, nos da que los monjes necesitarían más de

$$43$$

veces la edad actual del universo. ¡Más de 43 veces suponiendo que sólo tardan un segundo en mover cada pieza!

1.2. Descripción del juego

Este juego en su forma más básica está formado por tres varillas verticales, en una de ellas, la cual denominaremos origen, se apila una torre de n discos ordenados de mayor a menor tamaño, siendo el disco de mayor tamaño la base. El objetivo de este juego consiste en mover la torre de la varilla origen a la varilla destino con el menor número de movimientos posible. Para realizarlo habrá que seguir dos simples normas:

- Sólo se moverá un disco por vez.
- No se podrá colocar un disco de mayor tamaño sobre otro de menor tamaño.

1.3. Estrategia

Lo importante antes de comenzar a contar el número de movimientos necesarios para resolver el juego, y otros poroblemas combinatorios asociados, es tener una solución del juego y poder garantizar que está solución es óptima, i.e. la mejor posible.

Teorema 1.1. *El algoritmo óptimo, el que menor número de movimientos requiere, para mover una torre de n discos de la primera varilla a la tercera es el siguiente algoritmo recursivo:*

- *Si $n = 0$, entonces no hacer nada.*
- *Si $n = 1$, entonces mover el único disco de la primera varilla a la tercera.*
- *Si $n > 1$, entonces:*
  1. *Mover la torre de $n-1$ discos de la primera varilla a la segunda, aplicando el mismo algoritmo considerando la segunda varilla como la tercera y viceversa.*
  2. *Mover el n-ésimo disco de la primera varilla a la tercera.*
  3. *Mover la torre de $n-1$ discos de la segunda varilla a la tercera, aplicando el mismo algoritmo considerando la primera varilla como la segunda y viceversa.*

Además, este algoritmo es el único algoritmo óptimo posible, en el sentido de que cualquier otro algoritmo óptimo ejecuta los mismos pasos.

Ejemplo 1.1. *Veamos gráficamente como se aplica el algoritmo anterior a los primeros cuatro casos no nulos.*

Caso $n = 1$*:*

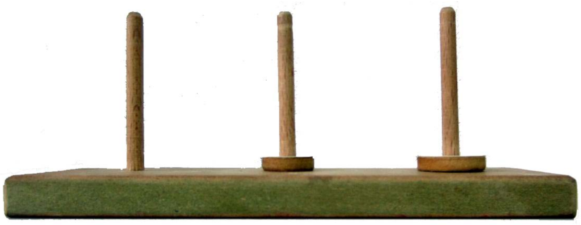
Posición inicial

Paso 1

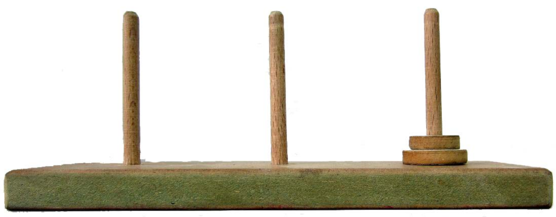
Caso $n = 2$*:*

Posición inicial

Paso 1

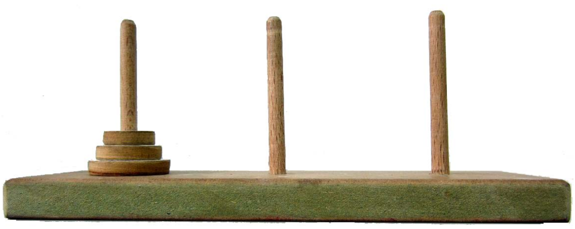


Paso 2

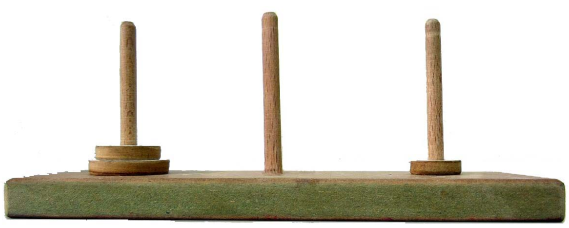


Paso 3

Caso $n = 3$*:*



Posición inicial



Paso 1

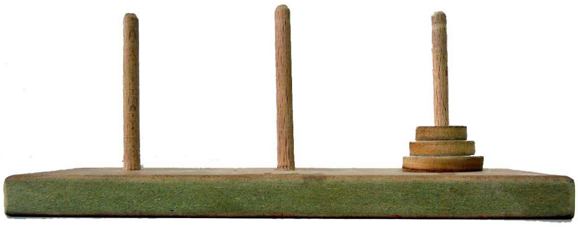
Paso 2

Paso 3

Paso 4

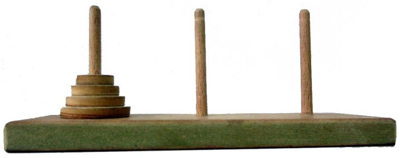
Paso 5

Paso 6

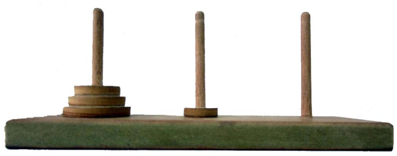


Paso 7

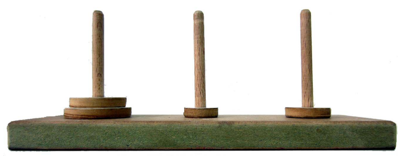
Caso $n = 4$*:*



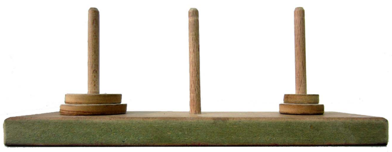
Posición inicial



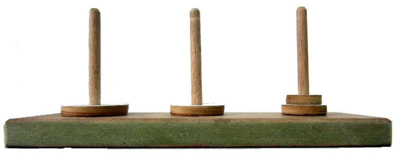
Paso 1



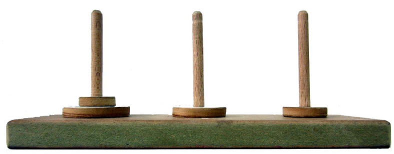
Paso 2



Paso 3



Paso 4



Paso 5

Paso 6

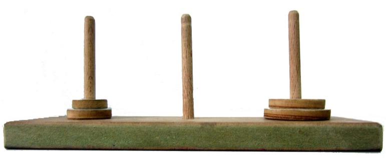
Paso 7

Paso 8

Paso 9

Paso 10

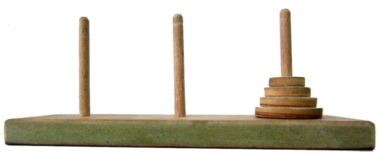
Paso 11



Paso 12

Paso 13

Paso 14



Paso 15

Demostración. Primero, mostremos que el algoritmo dado funciona. Obviamente, para los casos $n = 0$ y $n = 1$ funciona. Ahora, supongamos que funciona para una torre con $N - 1 \geq 1$ discos, entonces se debe dar que funciona para una torre con N dado que al analizar el algoritmo se tiene que paso por paso:

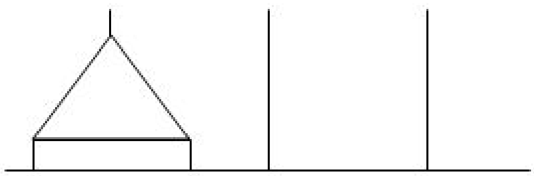
1. Mueve de forma efectiva la torre de $n - 1$ discos de la primera varilla a la segunda.
2. Mueve el n-ésimo disco de la primera varilla a la tercera.
3. Mueve de forma efectiva la torre de $n - 1$ discos de la segunda varilla a la tercera.

Por lo que resuelve el juego, dado que en los pasos 1 y 3 se tiene éxito por la hipótesis inductiva. Finalmente, en virtud del principio de inducción, concluimos que el algoritmo funciona para torres con una cantidad arbitraria de discos.

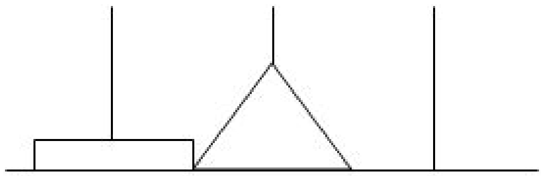
Una vez que ya hemos mostrado que funciona, demostremos que es el único algoritmo óptimo en el sentido expuesto. Así, denotemos por A nuestro algoritmo y sea T otro algoritmo óptimo cualquiera, denotemos por A_n y T_n respectivamente las secuencias de movimientos que ejecutan respectivamente A y T para resolver el juego con n torres. Debemos mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$A_n = T_n.$$

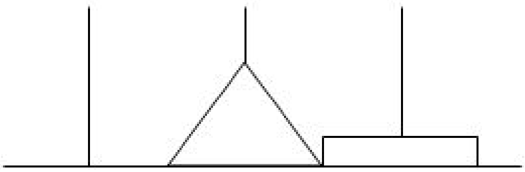
Obviamente esto es cierto para $n = 0$ y $n = 1$ por simple comprobación de casos, ahora tomemos como hipótesis inductiva que efectivamente para esto es cierto para un $N - 1 \geq 1$ y cualquier algoritmo óptimo T. De este modo, es fácil ver que cualquier algoritmo óptimo para resolver el juego de N torres sigue un itinerario de la forma



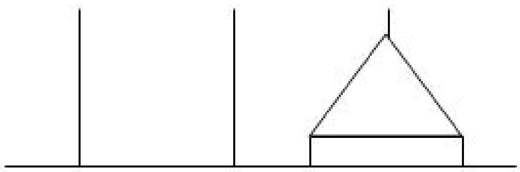
Posición inicial



Posición antes de mover el disco N-ésimo



Posición tras mover el disco N-ésimo



Posición final

dado que para poder mover la pieza N-ésima, previamente tenemos que quitar todas las que tiene encima y además la tercera varilla deberá estar libre para así poder moverla allí, fijarse que necesariamente en un algoritmo óptimo la pieza grande sólo se mueve una vez dado que cada vez que se mueve hay que mover la torre con el resto de los discos al completo.

La única manera de poder hacerlo es formar una pila en la segunda varilla con las $N - 1$ piezas de menor tamaño como se muestra en los dibujos previos. Y una vez movida la N-ésima pieza, solo nos queda volver a mover la pila de $N - 1$ piezas de la segunda varilla a la tercera.

Ahora, cualquier algoritmo óptimo al realizar estos traslados de la pila de $N - 1$ piezas debera realizar los mismo pasos que nuestro algoritmo A, dado que para que el número de movimientos sea mínimo deberá ser movida con un algoritmo óptimo para la torre de $N - 1$ discos que por hipótesis inductiva hará los mismo pasos que nuestro algoritmo A.

De esta forma, concluimos que

$$A_N = T_N.$$

Y así, por el principio de inducción, A es el único algoritmo óptimo posible -en el sentido expuesto-. $\square$

1.4. Número de movimientos sin dirección

Aquí contaremos primero el número de movimientos totales para resolver el juego de las torres de Hanoi con n discos, para después calcular el número de movimientos que se da en cada disco.

1.4.1. Totales

Para calcular el número de movimientos totales, calcularemos una relación de recurrencia para después obtener el número de movimientos a partir de ella.

Lema 1.2. *El número total mínimo de movimientos necesarios para mover la torre de n discos de una varilla a otra, a_n, viene dado por la relación de recurrencia:*

$$\begin{cases} a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 & si\ n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.2. *Analizamos los primeros casos, se ve como se cumple la recurrencia en ellos:*

$$\begin{array}{ll} n = 0 & a_0 = 0 \\ n = 1 & a_1 = 1 \ \ = 2 \cdot 0 + 1 = 2 \cdot a_0 + 1 \\ n = 2 & a_2 = 3 \ \ = 2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot a_1 + 1 \\ n = 3 & a_3 = 7 \ \ = 2 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot a_2 + 1 \\ n = 4 & a_4 = 15 = 2 \cdot 7 + 1 = 2 \cdot a_3 + 1 \end{array}$$

Demostración. Claramente para $n = 0$ y $n = 1$ es cierto. Ahora, si $n > 1$, recordando el algoritmo recursivo explicado en el teorema 1.1, debemos mover la torre de $n-1$ discos a la varilla de paso, después mover el n-ésimo a la final y mover nuevamente encima suyo la torre de $n-1$ discos que teníamos en la varilla de paso.

Por lo tanto,

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1.$$

Y por el principio de inducción concluimos que se verifica la recurrencia. □

De la recurrencia anterior obtenemos que:

Teorema 1.3. *El número total mínimo de movimientos necesarios para mover la torre de n discos de una varilla a otra, a_n, viene dada por*

$$a_n = 2^n - 1$$

Ejemplo 1.3. *Claramente se ve que en los primeros casos la fórmula es cierta.*

$$\begin{array}{ll} n = 0 & a_0 = 0 \ \ = 2^0 - 1 \\ n = 1 & a_1 = 1 \ \ = 2^1 - 1 \\ n = 2 & a_2 = 3 \ \ = 2^2 - 1 \\ n = 3 & a_3 = 7 \ \ = 2^3 - 1 \\ n = 4 & a_4 = 15 = 2^4 - 1 \end{array}$$

Demostración. Lo probaremos por tres métodos distitintos: por inducción, usando la función generatriz y matricialmente.

i) Por inducción:

Aplicando la relación de recurrencia obtenida, lema 1.2, se da que para $n = 0$ es cierto, dado que

$$a_0 = 2^0 - 1 = 0.$$

Y si lo fuera cierto para $N - 1$, entonces es cierto para N dado que

$$a_N = 2 \cdot a_{N-1} + 1 = 2 \cdot (2^{N-1} - 1) + 1 = 2^N - 2 + 1 = 2^N - 1.$$

Por lo que en virtud del principio de inducción, concluimos que

$$a_n = 2^n - 1.$$

ii) Usando la función generatriz:

Por el lema 1.2,

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & \text{si } n \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

De esta forma, la función generatriz verifica que

$$\begin{aligned} g_a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot a_{n-1} + 1) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} \cdot x^n + x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1}) \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \cdot x^{n-1} + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2x \cdot g_a(x) + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Luego,

$$g_a(x)(1 - 2x) = \frac{x}{1-x}.$$

Y así,

$$g_a(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)},$$

donde

$$x = (1-x) - (1-2x)$$

al ser dividido por $(1-x)(1-2x)$ nos da

$$\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x) - (1-2x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = g_a(x)$$

que aplicando el desarrollo de la serie geométrica nos da que

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \cdot x^n.$$

De este modo, concluimos que el número de movimientos es dado por

$$a_n = 2^n - 1.$$

iii) Matricialmente:

Para aplicar los métodos del álgebra lineal de matrices, visualizamos la relación de recurrencia como una función afín

$$f(x) = 2x + 1.$$

La cual nos permite reescribir la recurrencia como

$$a_n = f(a_{n-1}).$$

Matricialmente tenemos la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, supongamos que A sea diagonalizable;[4] en ese caso, hay una $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tal que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde λ_0 y λ_1 son los autovalores de la matriz A. Y por lo tanto, podríamos calcular la potencia de la matriz que buscamos fácilmente, ya que

$$A^n = \left(P \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^n = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

en virtud de que $X \mapsto PXP^{-1}$ es un homomorismo de grupos.

Para obtener P calculamos el polinomio característico, los autovalores y autovectores de la matriz A, así se da que el poinomio característico es

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1).$$

A partir de donde se tiene que los autovalores de A son 2 y 1, de donde inmediatamente A es diagonalizable sobre $\mathbb{Q}$ al tener todas sus raíces en ese cuerpo χ_a y no ser múltiple ninguna. Fácilmente, aplicando la definición, tenemos como autovector de 2 a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como autovector de 1 a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[4] Lo que se expone a continuación también funciona usando la forma canónica de Jordan, cuyas potencias son fáciles de calcular.

es una de las matrices de paso deseadas, bajo la cual

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Aplicando lo anterior, se calcula la potencia de A^n como sigue:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y consecuentemente,

$$a_n = 2^n - 1$$

como deseábamos mostrar. □

1.4.2. De cada pieza

Al igual que con el número de movimientos totales, primero calcularemos una relación de recurrencia y después a partir de ella determinaremos el número de movimientos de cada pieza.

Lema 1.4. *El número mínimo de movimientos de la pieza p-ésima*[5] *necesarios para mover la torre de n discos de una varilla a otra, a_n^p, verifica que:*

$$a_n^p = \begin{cases} 2 \cdot a_{n-1}^p & si\ n > p \\ 1 & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{cases}$$

Ejemplo 1.4. *Analizando los primeros cuatro casos, se observa que*

$$\begin{array}{llll} a_1^1 = 1 & a_1^2 = 0 & a_1^3 = 0 & a_1^4 = 0 \\ a_2^1 = 2 = 2 \cdot a_1^1 & a_2^2 = 1 & a_2^3 = 0 & a_2^4 = 0 \\ a_3^1 = 4 = 2 \cdot a_2^1 & a_3^2 = 2 = 2 \cdot a_2^2 & a_3^3 = 1 & a_3^4 = 0 \\ a_4^1 = 8 = 2 \cdot a_3^1 & a_4^2 = 4 = 2 \cdot a_3^2 & a_4^3 = 2 = 2 \cdot a_3^3 & a_4^4 = 1 \end{array}$$

Y así, en ellos tenemos que se cumple el lema.

Demostración. Si $n < p$, entonces no hay pieza p-ésima cuando jugamos y se verifica que no la movemos ninguna vez, y así

$$a_n^p = 0.$$

Ahora, si $n = p$, entonces el p-ésimo disco es el mayor y solamente se meve una vez, de la varilla inicial a la final en virtud del algoritmo dado en el teorema 1.1. Y así,

$$a_p^p = 1.$$

Finalmente, si $n > p$, volviendo al algoritmo recursivo dado en el teorema 1.1,se da que primero se mueve la torre de $n-1$ a la varilla de paso, para después el disco n-ésimo de la varilla inicial a la final, y después mover la torre de $n-1$ discos de la varilla de paso a la final.

[5] Tomamos $p \in \mathbb{N}_1$.

En el primer paso, nuestro disco p-ésimo se mueve tantas veces como lo hace en juego con $n-1$ discos, en el segundo no se mueve dado que el n-ésimo disco no es el p-ésimo al ser $n>p$, y en el tercer paso de nuevo el disco p-ésimo se mueve tantas veces como en el juego de $n-1$ discos. Y de ese modo, para $n>p$ concluimos que

$$a_n^p = 2\cdot a_{n-1}^p.$$

Con lo que concluye la demostración del lema. $\square$

Teorema 1.5. *El número mínimo de movimientos de la pieza p-ésima*[6] *necesarios para mover la torre de n discos de una varilla a otra, a_n^p, viene dado por:*

$$a_n^p = \begin{cases} 2^{n-p}, & si\ n \geq p \\ 0, & si\ n < p. \end{cases}$$

Ejemplo 1.5. *Analizando los primeros cuatro casos, se observa que*

$$\begin{array}{llll} a_1^1 = 1 = 2^{1-1} & a_1^2 = 0 & a_1^3 = 0 & a_1^4 = 0 \\ a_2^1 = 2 = 2^{2-1} & a_2^2 = 1 = 2^{2-2} & a_2^3 = 0 & a_2^4 = 0 \\ a_3^1 = 4 = 2^{3-1} & a_3^2 = 2 = 2^{3-2} & a_3^3 = 1 = 2^{3-3} & a_3^4 = 0 \\ a_4^1 = 8 = 2^{4-1} & a_4^2 = 4 = 2^{4-2} & a_4^3 = 2 = 2^{4-3} & a_4^4 = 1 = 2^{4-4} \end{array}$$

y que en ellos el teorema se verifica.

Demostración. La demostración, se basa en usar fuertemente el lema 1.4, así esto lo realizaremos mediante tres formas: por inducción, usando la función generatriz y algebraicamente.

i) Por inducción:

Si $n \leq p$, entonces el lema 1.4 nos da la afirmación. Ahora, apliquemos inducción para $n \geq p$.

El caso inicial $n=p$ ya ha sido probado usando el lema 1.4, ahora tomemos como hipótesis inductiva que se cumple para un $N \geq p$, y entonces por el lema 1.4 tenemos que dado que $N+1>p$ se da que

$$a_{N+1}^p = 2\cdot a_N^p = 2\cdot 2^{N-p} = 2^{N+1-p}$$

Por lo que se cumple para $N+1$. De este modo, por el principio de inducción, se verifica para cada $n \geq p$ y concluye la prueba.

ii) Usando la función generatiz:

Para un p cualquiera, planteemos la función generatriz

$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \cdot x^n.$$

Por el lema 1.4, dado que $a_n^p = 0$ si $n<p$, esto puede escribirse como

$$g_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n^p \cdot x^n = x^p \cdot \sum_{n=p}^{\infty} a_n^p \cdot x^{n-p} = x^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^p \cdot x^n.$$

A partir de aquí, usando el lema 1.4 tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica

$$a_{n+p}^p = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2\cdot a_{n-1+p}^p & \text{si } n>0 \end{cases}$$

[6]Al igual que en el lema 1.4, $p \in \mathbb{N}_1$.

Y así, de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^{p} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p}^{p} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_{n-1+p}^{p} \cdot x^n = 1 + 2 \cdot x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1+p}^{p} \cdot x^{n-1} = 1 + 2 \cdot x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^{p} \cdot x^n,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} g_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n^p \cdot x^n &= x^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^{p} \cdot x^n \\ &= x^p \cdot \left(1 + 2 \cdot x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^{p} \cdot x^n\right) = x^p + 2x \cdot x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^{p} \cdot x^n = x^p + 2x \cdot g_p(x). \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo, $(1-2x)g_p(x) = x^p$ ó

$$g_p(x) = \frac{x^p}{1-2x}$$

donde aplicando el desarrollo de la serie geométrica

$$g_p(x) = \frac{x^p}{1-2x} = x^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{\infty} 2^{n-p} x^n.$$

Esto nos da excatamente la afirmación, al recordar que el coeficiente de x^n es exactamente a_n^p.
iii) Algebraicamente:

Los casos $n < p$ ya son dados por el lema 1.4, así que nos centraremos en el caso $n \geq p$, para el que consideraremos la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ dada por

$$x_n = a_{n+p}^{p}.$$

Que por el lema 1.4 verifica

$$x_n = a_{n+p}^{p} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 2 \cdot a_{n-1+p}^{p} = 2 \cdot x_{n-1}, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

De esta forma, como para $n > 0$,

$$x_n = 2 \cdot x_{n-1},$$

la ecuación asociada a la recurrencia es

$$\lambda = 2,$$

y por ello, se da que nuestra sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es de la forma

$$x_n = C \cdot 2^n.$$

Como $x_0 = 1$, nos da $C = 1$, y así

$$x_n = 2^n$$

para $n \geq 0$, o sea

$$a_{n+p}^{p} = 2^n$$

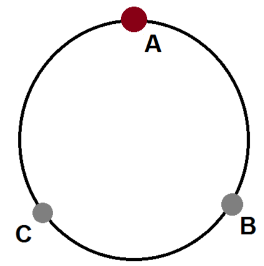
para $n \geq 0$. Lo cual, cambiando el subíndice se traduce en

$$a_n^p = 2^{n-p}$$

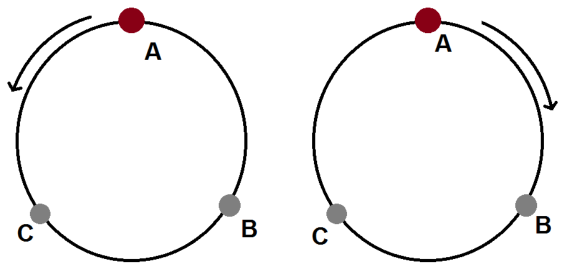
cuando $n \geq p$. Por lo que concluye la demostración del teorema. □

1.5. Modelo circular

El modelo circular se basa en suponer que las varillas del juego están colocadas en una cirunferencia como sigue



En nuestro paricularización, tomaremos como sentido positivo el antihorario y como negativo el horario, así tendremos que mover la torre de la varilla A a la varilla C y consideraremos que mover a izquierda una pieza es moverla una posición en el sentido positivo y moverla a derecha moverla una posición en el sentido negativo.



Mover a izquierda Mover a derecha

Si bien esta decisión es arbitraria, dándose que podíamos haber tomado otra varilla inicial o final u otro sentido, se da que cualquier otro modelo circular imaginable es convertible a este. Por ello, sin pérdida de generalidad trataremos con este modelo circular, al ser los resultados que se obtienen para él fácilmente convertibles a cualquier otro modelo.

1.5.1. Secuencias de movimientos

Lema 1.6. *Dado el juego de las torres de Hanoi con una torre de n discos en el modelo circular, consideremos la sucesión de los discos movidos en el algoritmo óptimo, s_n, cuyo i-ésimo témino es el número del disco movido en el i-ésimo movimiento. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}_1$ se verifica que*

$$s_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ s_{n-1}, n, s_{n-1} & si\ n > 1 \end{cases}$$

y que s_n es simétrica.

Ejemplo 1.6. *Si consideramos los cuatro primeros casos de las torres de Hanoi, puede observarse como se verifica el lema dado que*

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1,2,1 && = s_1,2,s_1 \\ s_3 &= 1,2,1,3,1,2,1 && = s_2,3,s_2 \\ s_4 &= 1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1 && = s_3,4,s_3 \end{aligned}$$

y claramente s_1, s_2, s_3 y s_4 son simétricas.

Demostración. Primero, probemos la relación de recurrencia aplicando el algoritmo dado en el teorema 1.1. Así, para $n = 1$, la afirmación es claramente cierta dado que $s_1 = 1$, y si $n > 1$, nuestro algoritmo recursivo nos da que primero movemos la torre de $n-1$ discos de la varilla A a la varilla B, después movemos el n-ésimo disco de la varilla A a la C y finalmente movemos la torre de $n-1$ discos de la B a la C.

Ahora, claramente la sucesión de piezas movidas obtenida al mover la torre de $n-1$ discos es independiente de las varillas de origen y legada, por ello inicialmente tenemo la sucesión s_{n-1}, donde después viene n al mover el disco n-ésimo y finalmente de nuevo s_{n-1} al mover la torre de $n-1$ discos de nuevo. Por ello, concluimos que

$$s_n = s_{n-1}, n, s_{n-1}.$$

Y la firmación es cierta para cada $n > 1$, por lo que conluye la prueba de la relación de recurrencia para las suecesiones de piezas movidas.

Finalmente, usemos el hecho anterior para probar la simetría de s_n usando el principio de inducción nuevamente. Así, para $N = 1$ es cierta claramente la simetría, y si lo es para un $N \geq 1$, entonces lo es para $N+1$ dado que

$$s_{N+1} = s_N, N+1, s_N$$

debe ser simétrica al serlo s_N. Ergo, por el principio de inducción concluye la prueba de simetría. $\square$

Teorema 1.7. *Dado el juego de las torres de Hanoi con una torre de n discos en el modelo circular, entonces el disco p-ésimo*[7] *se mueve por primera vez en el movimiento 2^{p-1}, y a partir de ahí cada 2^p movimientos moviéndose por última vez en el movimiento $2^n - 2^{p-1}$. Además, si $n-p$ es par, entonces el disco se moverá siempre a la izquierda, y si es impar, entonces a la derecha.*

Ejemplo 1.7. *Analizaremos lo que sucede con una torre de 4 discos, para ello miramos la siguiente tabla donde A denota la primera varilla, B la segunda, C la tercera, y D denota que el movimiento es hacia la derecha e I hacia a la izquierda.*[8]

Mov.	*Disco*	*V. salida*	*V. llegada*	*Sentido*
1	*1*	*A*	*B*	*D*
2	*2*	*A*	*C*	*I*
3	*1*	*B*	*C*	*D*
4	*3*	*A*	*B*	*D*
5	*1*	*C*	*A*	*D*
6	*2*	*C*	*B*	*I*
7	*1*	*A*	*B*	*D*
8	*4*	*A*	*C*	*I*
9	*1*	*B*	*C*	*D*
10	*2*	*B*	*A*	*I*
11	*1*	*C*	*A*	*D*
12	*3*	*B*	*C*	*D*
13	*1*	*A*	*B*	*D*
14	*2*	*A*	*C*	*I*
15	*1*	*B*	*C*	*D*

En la tabla se aprecia que efectivamente se verifica el teorema, esto es:

[7] Obviamente, $p \in \{1, \ldots, n\}$

[8] Recordar la colocación de las varillas A, B y C en el modelo circular, y el significado de mover a derecha y mover a izquierda en dicho modelo.

1. *El primer disco se mueve por primera vez en el movimiento* $2^{1-1} = 1$ *y después cada* $2^1 = 2$ *movimientos hasta llegar al último movimiento* $2^4 - 2^{1-1} = 15$*. Además, se mueve siempre a la derecha, como era de esperar al ser* $4 - 1 = 3$ *impar.*

2. *El segundo disco se mueve por primera vez en el movimiento* $2^{2-1} = 2$ *y después cada* $2^2 = 4$ *movimientos hasta llegar al último movimiento* $2^4 - 2^{2-1} = 14$*. Además, se mueve siempre a la izquierda, como era de esperar al ser* $4 - 2 = 2$ *par.*

3. *El tercer disco se mueve por primera vez en el movimiento* $2^{3-1} = 4$ *y después cada* $2^3 = 8$ *movimientos hasta llegar al último movimiento* $2^4 - 2^{3-1} = 12$*. Además, se mueve siempre a la derecha, como era de esperar al ser* $4 - 3 = 1$ *impar.*

4. *El cuarto disco se mueve sólo en el movimiento* $2^{4-1} = 8$*, y lo hace hacia la izquierda, como era de esperar al ser* $4 - 4 = 0$ *par.*

Demostración. Dividiremos la prueba en varias partes, siguiendo el siguiente orden: movimiento inicial, movimiento final, período del movimiento y sentido de los movimientos de un disco.
1) Movimiento inicial

Procedamos por inducción, así sea $p \in \mathbb{N}_1$ se da que claramente se mueve una vez cuando $n = p$, dado que en ese caso por el lema 1.6 o bien $p = 1$ y entonces

$$s_1 = 1$$

O bien, $p > 1$ y entonces

$$s_p = s_{p-1}, p, s_{p-1}$$

donde la longitud de s_{p-1} es $2^{p-1} + 1$ por el teorema 1.3, y así efetivamente el disco p-ésimo se mueve por primera vez en el movimiento 2^{p-1}-ésimo dado que p no puede aparecer en s_{p-1}. A partir de aquí, si la afirmación es cierta para un $N \geq p$, tenemos que lo será para $N + 1$ dado que por el lema 1.6 se tiene que

$$s_{N+1} = s_N, N+1, s_N.$$

Y por ello, la primera posición s_{N+1} en la que aparece p es la misma que la de s_N, que por hipótesis inductiva es 2^{p-1}. Y así, por el principio de inducción concluimos que la primera vez que se mueve la p-ésima pieza en el juego con n discos, con $n \geq p$, es en el movimiento 2^{p-1}-ésimo.
2) Movimiento final

Sea $p \in \mathbb{N}_1$ y $n \geq p$, se da que p aparece por primera vez en s_n en la posición 2^{p-1}-ésimo, pero como por el lema 1.6, s_n es simétrica, se da que aparecerá por última vez en la posición $\left[(2^n - 1) - (2^{p-1} - 1)\right]$-ésima dado que por el teorema 1.3 s_n tiene longitud $2^n - 1$. De esta forma, concluimos que la última vez que se mueve la pieza p-ésima es en el $\left(2^n - 2^{p-1}\right)$-ésimo movimiento.
3) Periodicidad del movimiento

Sea $p \in \mathbb{N}_1$ y $n \geq p$, probemos por inducción que cada 2^p movimientos se mueve la p-ésima pieza desde la primera vez en el movimiento 2^{p-1}-ésimo hasta la última vez en el movimiento $\left(2^n - 2^{p-1}\right)$-ésimo en el juego de las torres de Hanoi con n discos.

En primer lugar, cuando $n = p$ la afirmación es claramente cierta dado que a pesar de moverse una sóla vez, es técnicamente cierto que se mueve cada 2^p movimientos entre el movimiento 2^{p-1}-ésimo y el $2^p - 2^{p-1}$-ésimo, que es el mismo movimiento. A partir de aquí, tomemos como hipótesis inductiva que la afirmación es cierta para un $N \geq p$ y probaremos que también lo es para $N + 1$. Así, por el lema 1.6 se tiene que

$$s_{N+1} = s_N, N+1, s_N.$$

Y por ello dadas dos apariciones sucesivas de p en s_{N+1}, bien ambas están en el primer o segundo s_N y por la hipótesis inductiva se diferencian exactamente en 2^p, o bien una está en el primer s_N y la otra en el segundo s_N.

En este último caso, necesariamente la primera debe ser la última aparición de p en el primer s_N y la segunda la primera en el segundo s_N. Así, la primera p aparece en la posición $\left(2^N - 2^{p-1}\right)$-ésima de s_{N+1} y la segunda p aparecerá en la posición $\left(2^N + 2^{p-1}\right)$-ésima dado que p que la posición de $N+1$ es la 2^N-ésima en virtud de que por el teorema 1.3 s_N tiene longitud $2^N - 1$.

De esta forma, estas dos posiciones distan 2^p y por ello, la afirmación es cierta para $N+1$. Finalmente, el principio de inducción nos da la afirmación general.

4) Sentido de los movimientos

Sea $p \in \mathbb{N}_1$ y $n \geq p$, probaremos que el disco p-ésimo se mueve siempre a la izquierda si $n-p$ es par y siempre a la derecha si $n-p$ es impar en el juego con n discos. Para ello, usaremos de nuevo el principio de inducción.

En virtud de algoritmo recursivo dado en el teorema 1.1 y que estamos moviendo la torre de la varilla A a la C, cuando $n = p$ la p-ésima pieza se mueve una única vez de la varilla A a la C, esto es, realiza todos sus movimientos hacia la izquierda. Por lo que en este caso se cumple la afirmación dado que en este caso $n - p = p - p = 0$ es par.

Ahora, tomemos como hipótesis inductiva que la afirmación es cierta para un $N \geq p$ y probémosla para $N+1$. Así, por el algoritmo recursivo dado en el teorema 1.1 como $N+1 > 1$ se da que realizamos los siguientes pasos:

- Movemos la torre de N discos de la varilla A a la B, esto es, a la derecha.
- Movemos el disco $(N+1)$-ésimo una posición a la izquierda.
- Movemos la torre de N discos de la varilla B a la C, esto es, a la derecha.

Así, por hipótesis inductiva sabemos que al mover la torre de N discos a la izquierda la p-ésima pieza se mueve siempre a la izquierda si $N-p$ es par, y siempre a la derecha si es impar. Ahora, al considerar la simetría del plano que intercambia B y C y fija A, tenemos que todo movimiento a izquierda pasa a ser un movimiento a derecha y viceversa, y además la torre de N discos que antes se movía de A a C, esto es, hacia la izquierda; se mueve ahora de A a B, esto es, hacia la derecha.

De esa forma, la hipótesis inductiva nos permite afirmar gracias a la simetría anterior que al mover la torre de N discos a la derecha la p-ésima pieza se mueve siempre a la derecha si $N-p$ es par, y siempre a la izquierda si es impar. A partir de ello, tenemos la afirmación deseada dado que

- La p-ésima pieza se mueve a la izquierda si y sólo si $N-p$ es impar, lo cual pasa si y sólo si $N+1-p$ es par.
- La p-ésima pieza se mueve a la derecha si y sólo si $N-p$ es par, lo cual pasa si y sólo si $N+1-p$ es impar.

en virtud de que la torre de N discos sólo se mueve hacia la derecha en el algoritmo que consideramos, la hipótesis inductiva aplicada tras la simetría y que la p-ésima pieza sólo se mueve cuando movemos la torre de N discos. Ergo, la afirmación es cierta para $N+1$ y el principio de inducción concluye la demostración. □

Fijarse que este teorema nos describe cómo son los movimientos usado para resolver el juego de las torres de Hanoi con n torres en el modelo circular, y además nos permite tener una demostración alternativa de los teoremas 1.3 y 1.5 analizando los períodos de movimiento de cada pieza, esta técnica, la usaremos para probar el teorema 1.12.

Además, es interesante ver que el algoritmo dado para las torres de Hanoi puede simplificarse bastante a la hora de ser ejecutado usando el teorema anterior como sigue:

Corolario 1.8. *Dado el juego de las torres de Hanoi con n discos en el modelo circular, para resolver el juego de manera óptima basta seguir el siguiente algoritmo*

- *Si $n-1$ es par, entonces hasta que se llegue a una solución ejecutar cíclicamente:*
  1. *Mover la pieza pequeña hacia la izquierda.*
  2. *Mover la única pieza distinta de la pequeña que pueda moverse a la única posición a la que pueda moverse.*
- *Si $n-1$ es impar, entonces hasta que se llegue a una solución ejecutar cíclicamente:*
  1. *Mover la pieza pequeña hacia la derecha.*
  2. *Mover la única pieza distinta de la pequeña que pueda moverse a la única posición a la que pueda moverse.*

Ejemplo 1.8. *Observando el ejemplo 1.1, puede verse claramente como la pieza pequeña se mueve alternadamente siempre en el mismo sentido según el modelo circular, y como en cada paso intermedio donde se mueve una pieza de mayor tamaño hay una única posibilidad para ese movimiento.*

Por ello, el algoritmo simplificado que acabamos que dar funciona de forma efectiva, y además es óptimo, en estos primeros cuatro casos considerados.

Demostración. Claramente los movimientos de la pieza pequeña encajan con los del algoritmo óptimo del teorema 1.1 en virtud del teorema 1.7.

Ahora sólo nos que queda ver que los movimientos de las piezas no pequeñas encajan con el algoritmo. Para ello, fijémonos en que en cada paso intermedio todas las piezas no pueden estar en una misma varilla, y de esa forma hay al menos una pieza en las dos varillas donde no se halla la pieza pequeña. En esas dos varillas, habrá a lo sumo dos piezas candidatas a mover, de las cuales solamente se puede mover la menor de su varilla a la otra, al no poderse mover obviamente a la varilla donde está la pieza pequeña.

De esta forma, el algoritmo que hemos dado coincide necesariamente en todos los pasos intermedios con el algoritmo óptimo del teorema 1.1 al no haber otra posibilidad de movimiento a la hora de mover los discos no pequeños. □

1.5.2. Número de movimientos dirigidos

Una consecuencia inmediata del teorema 1.7, al ser combinado con el teorema 1.5, es la cantidad de movimientos a derecha e izquierda de una pieza dada.

Corolario 1.9. *Dado el juego de las torres de Hanoi con una torre de n discos en el modelo circular, el número de movimientos a izquierda de la pieza p-ésima*[9] *a izquierda, i_n^p, es dado por*

$$i_n^p = \begin{cases} 2^{n-p} & si\ n \geq p\ y\ n-p\ es\ par \\ 0 & si\ n < p\ ó\ n-p\ impar \end{cases}$$

Y el número de movimientos de esa misma pieza a derecha, d_n^p, es dado por

$$d_n^p = \begin{cases} 2^{n-p} & si\ n \geq p\ y\ n-p\ es\ impar \\ 0 & si\ n < p\ ó\ n-p\ par \end{cases}$$

[9] Tomamos $p \in \mathbb{N}_1$.

Ejemplo 1.9. *Basta ver como en el caso $n = 4$, basándonos en la tabla dada en el ejemplo 1.7, se verifica que*

$$i_4^1 = 0$$
$$i_4^2 = 4 = 2^{4-2}$$
$$i_4^3 = 0$$
$$i_4^4 = 1 = 2^{4-4}$$

Y

$$d_4^1 = 8 = 2^{4-1}$$
$$d_4^2 = 0$$
$$d_4^3 = 2 = 2^{4-3}$$
$$d_4^4 = 0$$

Demostración. Por el teorema 1.7 todos los movimientos son a izquierda si $n-p$ es par, y son a derecha si $n-p$ es impar, a partir de ahí, sólo hemos de aplicar el teorema 1.5 que nos da el número de movimientos de la pieza p-ésima en el juego con n discos.

(Posteriormente al demostrar el teorema 1.12 se tendrá una demostración alternativa de este hecho.) □

1.6. Modelo lineal

El modelo lineal de las torres de Hanoi, es con el que hemos estado trabajando hasta ahora excepto al considerar el modelo circular, consiste en considerar las tres varillas alienadas y poner como varilla inicial la izquierda y como final la derecha.

En este modelo, los movimientos tienen asociados un movimiento y una magnitud en tanto que no es lo mismo mover a la derecha una posición que mover dos posiciones a la derecha. De esta forma, es importante considerar esta magnitud a la hora de mover a derecha o izquierda.

Esto es ciertamente arbitrario en lo que a varillas inicial y final se refiere, sin embargo, a nivel conceptual no ganamos nada nuevo y la conversión de los resultados que obtenemos de nuestro modelo lineal a cualquier otro modelo lineal son inmediatos. Por ello, sin pérdida de generalidad, podemos trabajar en el modelo lineal descrito inicialmente.

1.6.1. Secuencias de movimientos

Proposición 1.10. *Dado el juego de las torres de Hanoi con una torre de n discos en el modelo lineal, entonces el disco p-ésimo*[10] *se mueve por primera vez en el movimiento 2^{p-1}, y a partir de ahí cada 2^p movimientos moviéndose por última vez en el movimiento $2^n - 2^{p-1}$. Además, si $n-p$ es par, entonces el disco se moverá cíclicamente una vez dos posiciones a la derecha y dos veces una posición a la izquierda; y si es impar, entonces se moverá cíclicamente dos veces una posición a la derecha y una vez dos posiciones a la izquierda.*

Ejemplo 1.10. *Tomando el ejemplo 1.7, denotando ahora por 1D los movimientos un lugar a la derecha y por 2D los movimientos dos posiciones a la derecha y, análogamente, lo mismo con 1I y 2I; se obtiene la siguiente tabla.*

[10] Obviamente, $p \in \{1, \ldots, n\}$

Mov.	*Disco*	*V. salida*	*V. llegada*	*Sentido*
1	*1*	*A*	*B*	*1D*
2	*2*	*A*	*C*	*2D*
3	*1*	*B*	*C*	*1D*
4	*3*	*A*	*B*	*1D*
5	*1*	*C*	*A*	*2I*
6	*2*	*C*	*B*	*1I*
7	*1*	*A*	*B*	*1D*
8	*4*	*A*	*C*	*2D*
9	*1*	*B*	*C*	*1D*
10	*2*	*B*	*A*	*1I*
11	*1*	*C*	*A*	*2I*
12	*3*	*B*	*C*	*1D*
13	*1*	*A*	*B*	*1D*
14	*2*	*A*	*C*	*2D*
15	*1*	*B*	*C*	*1D*

Donde podemos observar que se verifica el teorema, dado que:

1. *La primera pieza se mueve uno a la derecha dos veces, para después moverse dos a la izquierda.*
2. *La segunda pieza se mueve primero dos a la derecha, para moverse después dos veces una a la izquierda y dos a la derecha.*
3. *La tercera pieza se mueve dos veces una posición a la derecha.*
4. *La cuarta pieza se mueve dos a la derecha.*

Demostración. Establezcamos una biyección entre el modelo circular y el modelo lineal, identificando la varilla 0 con la izquierda, la 1 con la central y la 2 con la derecha. A partir de aquí, es fácil ver que mover a derecha en el modelo circular en el modelo lineal se traduce a

- Mover una posición a la derecha en las varillas 0 (izquierda) y 1 (central).
- Mover dos posiciones a la izquierda en la varilla 2 (derecha).

y mover a izquierda en

- Mover una posición a la izquierda en las 1 (central) y 2 (derecha).
- Mover dos posiciones a la derecha en la varilla 0 (izquierda).

A partir de esta traducción y el teorema 1.7 se obtienen los resultados deseados. □

1.6.2. Número de movimientos dirigidos

Un colorario del teorema anterior, 1.10, es el siguiente teorema basado en contar simplemente las veces que se realiza un desplazamiento a derecha y otro a izquierda basándonos en que sabemos el número total de movimientos de cada pieza en virtud del teorema 1.5.

Corolario 1.11. *Dado el juego de las torres de Hanoi con una torre de n discos en el modelo lineal, el número de movimientos a izquierda de la pieza p-ésima*[11] *a izquierda, i_n^p, es dado por*

$$i_n^p = \begin{cases} \frac{1}{6}\left((3+(-1)^{n-p})\cdot 2^{n-p}-4\right), & si\ n \geq p \\ 0, & si\ n < p. \end{cases}$$

[11] Tomamos $p \in \mathbb{N}_1$.

Y el número de movimientos de esa misma pieza a derecha, d_n^p, es dado por

$$d_n^p = \begin{cases} \frac{1}{6}\left((3-(-1)^{n-p})\cdot 2^{n-p}+4\right), & si\ n \geq p \\ 0, & si\ n < p. \end{cases}$$

Lo cual de forma equivalente puede escribirse como[12]

$$i_n^p = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(2^{n-p}-1\right), & si\ n \geq p\ y\ n-p\ es\ par \\ \frac{1}{3}\left(2^{n-p}-2\right), & si\ n \geq p\ y\ n-p\ es\ impar \\ 0, & si\ n < p \end{cases} \qquad d_n^p = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{n-p}+2\right), & si\ n \geq p\ y\ n-p\ es\ par \\ \frac{2}{3}\left(2^{n-p}+1\right), & si\ n \geq p\ y\ n-p\ es\ impar \\ 0, & si\ n < p \end{cases}$$

Ejemplo 1.11. *Basta ver como en el caso $n = 4$, basándonos en la tabla dada en el ejemplo 1.10, se verifica que*

$$\begin{aligned} i_4^1 &= 2 = \frac{1}{6}\left(\left(3+(-1)^{4-1}\right)\cdot 2^{4-1}-4\right) \\ i_4^2 &= 2 = \frac{1}{6}\left(\left(3+(-1)^{4-2}\right)\cdot 2^{4-2}-4\right) \\ i_4^3 &= 0 = \frac{1}{6}\left(\left(3+(-1)^{4-3}\right)\cdot 2^{4-3}-4\right) \\ i_4^4 &= 0 = \frac{1}{6}\left(\left(3+(-1)^{4-4}\right)\cdot 2^{4-4}-4\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_4^1 &= 6 = \frac{1}{6}\left(\left(3-(-1)^{4-1}\right)\cdot 2^{4-1}+4\right) \\ d_4^2 &= 3 = \frac{1}{6}\left(\left(3-(-1)^{4-2}\right)\cdot 2^{4-2}+4\right) \\ d_4^3 &= 2 = \frac{1}{6}\left(\left(3-(-1)^{4-3}\right)\cdot 2^{4-3}+4\right) \\ d_4^4 &= 1 = \frac{1}{6}\left(\left(3-(-1)^{4-4}\right)\cdot 2^{4-4}+4\right) \end{aligned}$$

Demostración. Si $p > n$ el resultado es inmediato, dado que no hay pieza p-ésima; así supongamos $n \geq p$. En este caso, la pieza sabemos que se mueve 2^{n-p} veces por el teorema 1.5; por el teorema 1.10 sabemos que si $n-p$ es par, entonces se realizan la secuencia de desplazamientos

- Dos posiciones a la derecha
- Una posición a la izquierda
- Una posición a la izquierda

Y si $n-p$ es impar, entonces

- Una posición a la derecha
- Una posición a la derecha
- Dos posiciones a la izquierda

De este modo, para contar el número de movimientos a izquierda, el problema se traduce de forma inmediata, por lo anterior, a contar el números de ceros en sucesiones de la forma

$$100100100\ldots$$

[12] Basta considerar la paridad de $n-p$ y operar según $(-1)^{n-p}$ sea 1 o -1.

de longitud 2^{n-p} si $n-p$ es par, y a contarlos en sucesiones de la forma

$$110110110\ldots$$

de longitud 2^{n-p} si $n-p$ es impar. Y así, una vez calculados los movimientos a izquierda, es inmediato obtener los movimientos a derecha mediante

$$d_n^p = 2^{n-p} - i_n^p.$$

Como muestran las igualdades

$$\frac{1}{3}\left(2^{n-p}+2\right) = 2^{n-p} - \frac{2}{3}\left(2^{n-p}-1\right)$$

y

$$\frac{2}{3}\left(2^{n-p}+1\right) = 2^{n-p} - \frac{1}{3}\left(2^{n-p}-2\right)$$

correspondientes a los casos $n-p$ par y $n-p$ impar respectivamente. Por ello, contaremos solamente los movimientos a izquierda.

Cálculo i_n^p

Dividamos en dos casos el cálculo, como ya se ha mostrado antes.

Caso $n-p$ par

En este caso, por ser $n-p$ par,

$$2^{n-p} \equiv (-1)^{n-p} \equiv 1 \pmod{3}.$$

De ese modo,

$$\frac{2^{n-p}-1}{3}$$

es entero. Por ello, en nuestra sucesión, hay $\frac{2^{n-p}-1}{3}$ secuencias 100 y una cola final 1, i.e. podemos escribirla como

$$\overbrace{100\ldots100}^{\frac{2^{n-p}-1}{3}}1.$$

A partir de aquí, dado que la cola final no tiene ceros, y cada subsecuencia 100 tiene dos, se da que hay

$$2\cdot\frac{2^{n-p}-1}{3} = \frac{2}{3}\left(2^{n-p}-1\right)$$

ceros, y por ello esa cantidad de movimientos a izquierda cuando $n-p$ es par.

Caso $n-p$ impar

Ahora, al ser $n-p$ impar,

$$2^{n-p} \equiv (-1)^{n-p} \equiv -1 \pmod{3}.$$

De ese modo,

$$\frac{2^{n-p}+1}{3}$$

es entero. Por ello, en nuestra sucesión, hay $\frac{2^{n-p}+1}{3}-1 = \frac{2^{n-p}-2}{3}$ secuencias 110 y una cola final 1, i.e. podemos expresarla como

$$\overbrace{110\ldots110}^{\frac{2^{n-p}-2}{3}}11.$$

De donde, dado que la cola final no tiene ceros, y cada subsecuencia 110 tiene uno, se da que hay

$$\frac{2^{n-p}-2}{3} = \frac{1}{3}\left(2^{n-p}-2\right)$$

ceros, y por ello se da esa cantidad de movimientos a izquierda cuando $n-p$ es impar.

Con esto concluye la demostración del teorema. □

1.7. Número de movimientos de una varilla a otra

Aquí vamos a contar el número de veces que movemos una pieza de una determinada varilla a otra y a partir de ahí, e indicar que resultados que se deducen de este teorema. Por conveniencia trabajaremos sobre el modelo circular, denotando a la varilla A por 1, a la B por 2 y a la C por 3.

Teorema 1.12. *Sea $a_{i,j}^{n,p}$ el número de veces que movemos la pieza p-ésima de la varilla i-ésima a la varilla j-ésima en el juego de las torres de Hanoi con n discos, se verifica que si $i = j$ ó $n < p$, entonces*

$$a_{i,j}^{n,p} = 0,$$

y si $n \geq p$, entonces

$$\begin{aligned}
a_{1,2}^{n,p} &= \frac{1}{6}(1-(-1)^{n-p})(2^{n-p}+1) \\
a_{1,3}^{n,p} &= \frac{1}{6}(1+(-1)^{n-p})(2^{n-p}+2) \\
a_{2,3}^{n,p} &= \frac{1}{6}(1-(-1)^{n-p})(2^{n-p}+1) \\
a_{2,1}^{n,p} &= \frac{1}{6}(1+(-1)^{n-p})(2^{n-p}-1) \\
a_{3,1}^{n,p} &= \frac{1}{6}(1-(-1)^{n-p})(2^{n-p}-2) \\
a_{3,2}^{n,p} &= \frac{1}{6}(1+(-1)^{n-p})(2^{n-p}-1)
\end{aligned}$$

O de forma equivalente, planteando según $n-p$ sea par o impar,

$$a_{1,2}^{n,p} = \begin{cases} 0, & si\ n-p\ par \\ \frac{1}{3}\left(2^{n-p}+1\right), & si\ n-p\ impar \end{cases}$$

$$a_{1,3}^{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{n-p}+2\right), & si\ n-p\ par \\ 0, & si\ n-p\ impar \end{cases}$$

$$a_{2,3}^{n,p} = \begin{cases} 0, & si\ n-p\ par \\ \frac{1}{3}\left(2^{n-p}+1\right), & si\ n-p\ impar \end{cases}$$

$$a_{2,1}^{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{n-p}-1\right), & si\ n-p\ par \\ 0, & si\ n-p\ impar \end{cases}$$

$$a_{3,1}^{n,p} = \begin{cases} 0, & si\ n-p\ par \\ \frac{1}{3}\left(2^{n-p}-2\right), & si\ n-p\ impar \end{cases}$$

$$a_{3,2}^{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{n-p}-1\right), & si\ n-p\ par \\ 0, & si\ n-p\ impar \end{cases}$$

Ejemplo 1.12. *Tomando el caso $n = 4$, y basándonos en la tabla del ejemplo 1.7 ó 1.10, se puede ver* *como se verifica para $p = 1$,*

$$
\begin{aligned}
a_{1,2}^{4,1} &= 3 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{n-1})(2^{n-1}+1)\\
a_{1,3}^{4,1} &= 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{n-1})(2^{n-1}+2)\\
a_{2,3}^{4,1} &= 3 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{n-1})(2^{n-1}+1)\\
a_{2,1}^{4,1} &= 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{n-1})(2^{n-1}-1)\\
a_{3,1}^{4,1} &= 2 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{n-1})(2^{n-1}-2)\\
a_{3,2}^{4,1} &= 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{n-1})(2^{n-1}-1)
\end{aligned}
$$

para $p = 2$,

$$
\begin{aligned}
a_{1,2}^{4,2} &= 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-2})(2^{4-2}+1)\\
a_{1,3}^{4,2} &= 2 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-2})(2^{4-2}+2)\\
a_{2,3}^{4,2} &= 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-2})(2^{4-2}+1)\\
a_{2,1}^{4,2} &= 1 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-2})(2^{4-2}-1)\\
a_{3,1}^{4,2} &= 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-2})(2^{4-2}-2)\\
a_{3,2}^{4,2} &= 1 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-2})(2^{4-2}-1)
\end{aligned}
$$

para $p = 3$,

$$
\begin{aligned}
a_{1,2}^{4,3} &= 1 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-3})(2^{4-3}+1)\\
a_{1,3}^{4,3} &= 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-3})(2^{4-3}+2)\\
a_{2,3}^{4,3} &= 1 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-3})(2^{4-3}+1)\\
a_{2,1}^{4,3} &= 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-3})(2^{4-3}-1)\\
a_{3,1}^{4,3} &= 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-3})(2^{4-3}-2)\\
a_{3,2}^{4,3} &= 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-3})(2^{4-3}-1)
\end{aligned}
$$

y para $p = 4$,

$$a_{1,2}^{4,4} = 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-4})(2^{4-4}+1)$$
$$a_{1,3}^{4,4} = 1 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-4})(2^{4-4}+2)$$
$$a_{2,3}^{4,4} = 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-4})(2^{4-4}+1)$$
$$a_{2,1}^{4,4} = 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-4})(2^{4-4}-1)$$
$$a_{3,1}^{4,4} = 0 = \frac{1}{6}(1-(-1)^{4-4})(2^{4-4}-2)$$
$$a_{3,2}^{4,4} = 0 = \frac{1}{6}(1+(-1)^{4-4})(2^{4-4}-1)$$

Demostración. Los demostraremos de dos formas distintas: la primera usando el teorema 1.7 y la segunda usando el método matricial basándonos en el algoritmo recursivo dada en el teorema 1.1.
i) Mediante el teorema 1.7

Fijémonos que la primera parte es trivial, esto es, si $i = j$ ó $n < p$, entonces claramente

$$a_{i,j}^{n,p} = 0$$

dado que claramente ni movemos ninguna pieza de una varilla en sí misma ni movemos piezas de tamaño mayor que la n-ésima cuando jugamos con la torre de n discos.

A partir de aquí, supondremos que $n \geq p$ para el resto de la demostración. Al igual que cuando probamos el colorario 1.11, el método actual se basará en plantear las sucesiones apropiadas y contar cuantas veces aparece cada una de las transiciones. De este modo, dada la pieza p-ésima construiremos la sucesión

$$a_0a_1a_2\ldots$$

donde cada a_i es cada una de las varillas donde ha estado dicha pieza, dándose que a_0 es la varilla inicial, y para $i > 0$ se da que a_i es la varilla a la que va a parar en el i-ésimo movimiento.

Por un lado, gracias al teorema 1.5, sabemos que la sucesión anterior tiene una longitud de $2^{n-p}+1$ al contar la varilla inicial y cada una de las otras varillas a las que se mueve. Y por otro lado, el teorema 1.7 nos dice que la sucesión es de la forma

$$132132132\ldots$$

si $n-p$ es par, y de la forma

$$123123123\ldots$$

si $n-p$ es impar, dado que la pieza se mueve en el modelo circular siempre a izquierda si $n-p$ es par y siempre a derecha si es impar. Siendo más explícitos, cuando $n-p$ es par, la p-ésima pieza al ir a izquierda irá de la varilla 1 a la 3, de la 3 a la 2 y de la 2 a la 1 repitiendo el ciclo hasta que deje de moverse, y análogamente cuando $n-p$ es impar, irá de la 1 a la 2, de la 2 a la 3 y de la 3 a la 1 repitiendo el ciclo hasta que deja de moverse; y por ello las sucesiones consisten en repetir respectivamente 132 y 123.

Separemos ahora el problema en dos casos según $n-p$ sea par o impar, dado que según el caso la secuencia a considerar es distinta.
Caso $n-p$ par

En este caso, al ser $n-p$ par, se da que

$$2^{n-p}+1 \equiv (-1)^{n-p}+1 \equiv 1+1 \equiv 2(\text{mód } 3).$$

Y así,
$$\frac{2^{n-p}-2}{3}$$
es entero. De esto, tenemos que nuestra secuencia de la forma
$$132132132\ldots$$
consta de $\frac{2^{n-p}-2}{3}$ repeticiones de 132 con una cola final de 13, por lo que podemos escribirla como
$$\overbrace{132\ldots132}^{\frac{2^{n-p}-2}{3}}13$$

Ahora, para calcular $a_{i,j}^{n,p}$ sólo hemos de contar cuantas veces aparece ij en la sucesión anterior, dado que por cada ij en la sucesión la pieza ha pasado de la varilla i-ésima a la j-ésima. Claramente 12, 23 y 31 no aparecen dado que detrás de un 1 hay siempre un 3, de un 2 un 1 y de un 3 un 2, y por ello
$$a_{1,2}^{n,p} = a_{2,3}^{n,p} = a_{3,1}^{n,p} = 0.$$
Finalmente, 13 aparece una vez por cada 132 y una más en la cola final, por lo que
$$a_{1,3}^{n,p} = \frac{2^{n-p}-2}{3} + 1 = \frac{2^{n-p}+1}{3};$$
21 aparece cada vez que aparece un 132 seguido de otro 132, lo cual pasa $\frac{2^{n-p}-2}{3} - 1$ veces[13], y uno más al final, al estar 132 seguido de 13 nos da otro 21, luego
$$a_{2,1}^{n,p} = \frac{2^{n-p}-2}{3} - 1 + 1 = \frac{2^{n-p}-2}{3};$$
y 32 aparece una vez por cada 132 y no parece en la cola final, así
$$a_{3,2}^{n,p} = \frac{2^{n-p}-2}{3}.$$

Caso $n-p$ impar

Aplicamos la misma estrategia que antes, sólo que ahora, al ser $n-p$ impar, de da que
$$2^{n-p} + 1 \equiv (-1)^{n-p} + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 (\text{mód } 3).$$
Y así,
$$\frac{2^{n-p}+1}{3}$$
es entero, por lo que nuestra sucesión está formada exactamente por $\frac{2^{n-p}+1}{3}$ 123, y por ello, puede escribirse como
$$\overbrace{123\ldots123}^{\frac{2^{n-p}+1}{3}}.$$
Aquí, es inmediato ver que 13, 21 y 32 no aparecen, dado que detrás de un 1 siempre hay un 2, de un 2 un 3 y de un 3 un 1. Por ello,
$$a_{1,3}^{n,p} = a_{2,1}^{n,p} = a_{3,1}^{n,p} = 0.$$

[13]Basta ver que esto pasa con todos los 132 menos el último.

Por último, 12 aparece una vez por cada 123, por lo que

$$a_{1,2}^{n,p} = \frac{2^{n-p}+1}{3};$$

23 también una vez por cada 123, así

$$a_{2,3}^{n,p} = \frac{2^{n-p}+1}{3};$$

y 31 una vez por cada 123 con un 123 detrás, lo cual es cierto para cada 123 menos el último de la secuencia, luego

$$a_{3,1}^{n,p} = \frac{2^{n-p}+1}{3} - 1 = \frac{2^{n-p}-2}{3}.$$

De esta forma concluye la demostración usando el teorema 1.7.

ii) Matricialmente

Al igual que antes, si $i = j$ ó $n < p$, entonces es trivial que

$$a_{i,j}^{n,p} = 0$$

Así, primero, planteemos una relación de recurrencia, sabiendo que

$$\begin{aligned} a_{1,2}^{p,p} &= 0 \\ a_{1,3}^{p,p} &= 1 \\ a_{2,3}^{p,p} &= 0 \\ a_{2,1}^{p,p} &= 0 \\ a_{3,1}^{p,p} &= 0 \\ a_{3,2}^{p,p} &= 0 \end{aligned}$$

dado que en ese caso el p-ésimo disco es el mayor y sólo se mueve una vez de la varilla inicial (1) a la final (3).

Ahora, si $n > p$, entonces tomando nuestro algoritmo inicialmente movemos la torre de $n-1$ de la varilla 1 a la 2, para después mover el n-ésimo disco y finalmente mover la torre de $n-1$ discos de la varilla 2 a la 3. De esta forma en la primera parte el disco p-ésimo se mueve como al resolver el juego con $n-1$ discos, pero con los papeles de 2 y 3 intercambiados; en la segunda el disco p-ésimo no se mueve y en la tercera de nuevo el disco p-ésimo se mueve como en el juego de $n-1$ discos, sólo que con los papeles de 1 y 2 intercambiados.

De esta forma, sea $\sigma = (2,3)$ y $\tau = (1,2)$ las trasposiciones que intercambian 2 y 3 y 1 y 2 respectivamente, se verifica que para cada $i, j \in \{1,2,3\}$ distintos se verifica

$$a_{i,j}^{n,p} = a_{\sigma i,\sigma j}^{n-1,p} + a_{\tau i,\tau j}^{n-1,p}.$$

O lo que es lo mismo, tras desarrollar caso por caso la igualdad anterior,

$$\begin{aligned} a_{1,2}^{n,p} &= a_{1,3}^{n-1,p} + a_{2,1}^{n-1,p} \\ a_{1,3}^{n,p} &= a_{1,2}^{n-1,p} + a_{2,3}^{n-1,p} \\ a_{2,3}^{n,p} &= a_{3,2}^{n-1,p} + a_{1,3}^{n-1,p} \\ a_{2,1}^{n,p} &= a_{3,1}^{n-1,p} + a_{1,2}^{n-1,p} \\ a_{3,1}^{n,p} &= a_{2,1}^{n-1,p} + a_{3,2}^{n-1,p} \\ a_{3,2}^{n,p} &= a_{2,3}^{n-1,p} + a_{3,1}^{n-1,p} \end{aligned}$$

De este modo, sea

$$v_n^p = \begin{pmatrix} a_{1,2}^{n,p} \\ a_{1,3}^{n,p} \\ a_{2,3}^{n,p} \\ a_{2,1}^{n,p} \\ a_{3,1}^{n,p} \\ a_{3,2}^{n,p} \end{pmatrix}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$v_p^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$v_n^p = A \cdot v_{n-1}^p$$

para $n > p$. De esta forma, obtenemos que

$$v_n^p = A^{n-p} \cdot v_p^p$$

para $n \geq p$. Por ello, para calcular v_n^p habremos de aplicar la misma técnica usada en la demostración del teorema 1.3. Fijarse, que sabemos que A es diagonalizable por el teorema espectral al ser simétrica y real, por ello, primero calculamos el polinomio característico de A obteniendo

$$\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x+2)$$

y a partir de él, sabemos que los valores propios de A son 2, 1, -1 y -2. Ahora, calculamos una base autovalores obteniendo la matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuya inversa es

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y, que verifica que

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

De esta forma,

$$A^n = P \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

esto es, A^n es, tras realizar los cálculos pertinentes[14] tendrá la forma

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (1+(-1)^n)(2^n+2) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n-2) \\ (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n+2) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n-2) & (1+(-1)^n)(2^n-1) \\ (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n+2) & (1-(-1)^n)(2^n-2) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n+1) \\ (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n-2) & (1+(-1)^n)(2^n+2) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n-1) \\ (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n-2) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n+2) & (1-(-1)^n)(2^n+1) \\ (1-(-1)^n)(2^n-2) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n-1) & (1-(-1)^n)(2^n+1) & (1+(-1)^n)(2^n+2) \end{pmatrix}.$$

Y de ese modo,

$$v_n^p = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (1-(-1)^{n-p})(2^{n-p}+1) \\ (1+(-1)^{n-p})(2^{n-p}+2) \\ (1-(-1)^{n-p})(2^{n-p}+1) \\ (1+(-1)^{n-p})(2^{n-p}-1) \\ (1-(-1)^{n-p})(2^{n-p}-2) \\ (1+(-1)^{n-p})(2^{n-p}-1) \end{pmatrix}$$

como deseábamos mostrar. □

Es fácil ver como los teoremas 1.3 y 1.5, junto a los colorarios 1.9 y 1.11, son consecuencias del presente teorema, que a su vez no es más que un refinamiento de esos resultados. Ahora, como colorario propio tenemos

Corolario 1.13. *Sea $a_{i,j}^n$ el número de veces que movemos una pieza de la varilla i-ésima a la varilla j-ésima en el juego de las torres de Hanoi con n discos, se verifica que si $i = j$, entonces*

$$a_{i,j}^n = 0,$$

[14]Que omitimos dado el tamaño de la matriz.

y sino, entonces

$$\begin{aligned}
a_{1,2}^n &= \frac{1}{6}\left(2^n + \frac{(-2)^n - 1}{3} + n - 1 + \frac{(-1)^n - 1}{2}\right)\\
a_{1,3}^n &= \frac{1}{6}\left(2^n + \frac{1-(-2)^n}{3} + 2\cdot n - (-1)^n\right)\\
a_{2,3}^n &= \frac{1}{6}\left(2^n + \frac{(-2)^n - 1}{3} + n - 1 + \frac{(-1)^n - 1}{2}\right)\\
a_{2,1}^n &= \frac{1}{6}\left(2^n + \frac{1-(-2)^n}{3} - n - 1 + \frac{(-1)^n - 1}{2}\right)\\
a_{3,1}^n &= \frac{1}{6}\left(2^n + \frac{(-2)^n - 1}{3} - 2\cdot n - (-1)^n\right)\\
a_{3,2}^n &= \frac{1}{6}\left(2^n + \frac{1-(-2)^n}{3} - n - 1 + \frac{(-1)^n - 1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.13. *Tomando el caso $n = 4$, y utilizando nuevamente la tabla del ejemplo 1.7 ó 1.10, se puede ver claramente que*

$$\begin{aligned}
a_{1,2}^4 = 4 &= \frac{1}{6}\left(2^4 + \frac{(-2)^4 - 1}{3} + 4 - 1 + \frac{(-1)^4 - 1}{2}\right)\\
a_{1,3}^4 = 3 &= \frac{1}{6}\left(2^4 + \frac{1-(-2)^4}{3} + 2\cdot 4 - (-1)^4\right)\\
a_{2,3}^4 = 4 &= \frac{1}{6}\left(2^4 + \frac{(-2)^4 - 1}{3} + 4 - 1 + \frac{(-1)^4 - 1}{2}\right)\\
a_{2,1}^4 = 1 &= \frac{1}{6}\left(2^4 + \frac{1-(-2)^4}{3} - 4 - 1 + \frac{(-1)^4 - 1}{2}\right)\\
a_{3,1}^4 = 2 &= \frac{1}{6}\left(2^4 + \frac{(-2)^4 - 1}{3} - 2\cdot 4 - (-1)^4\right)\\
a_{3,2}^4 = 1 &= \frac{1}{6}\left(2^4 + \frac{1-(-2)^4}{3} - 4 - 1 + \frac{(-1)^4 - 1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Demostración. Basta aplicar el teorema 1.12, y sumar sobre p las expresiones, aplicando la fórmula para la suma de progresiones geométricas y agrupando los términos para obtener la fórmula en el modo deseado. □

2. Juego icosiano en un hipercubo y torres de Hanoi

En la sección anterior hemos contado casi todo lo que podía contarse acerca del juego de las torres de Hanoi o al menos, en su defecto, desarrollado todas las técnicas necesarias para ello. Sin embargo, ahora mostraremos como pasar del juego de las torres de Hanoi al juego icosiano en un n-cubo y aprovechar esto para dar una demostración alternativa del teorema 1.3.

2.1. Juego icosiano

Aquí daremos la descripción del juego icosiano, así como un poco de su historia, y su formalización precisa para poder explicar después de forma clara y explícita la relación de este juego con el de las torres de Hanoi.

2.1.1. Historia

William Rowan Hamilton [9]

El juego icosiano es un juego propuesto por el matemático irlandés William Rowan Hamilton fue inventado en 1850 motivado por su creación del cálculo icosiano. Este cálculo fue un invento de Hamilton que le permitía describir las simetrías del icosaedro, y también del dodecaedro, y operar con ellas,[15] y lo usaba para mostrar un ejemplo de cálculo distinto de sus cuaterniones, los cuales no son más que un intento fallido de obtener números complejos con los que describir el espacio tridimensional.[16]

El juego propuesto por Hamilton consistía en encontrar en un dodecaedro un camino, que yendo por los vértices y aristas pasara por todos los vértices una y sólo una vez y fuera cerrado, esto es, que el vértice inicial y el final sean los mismos. Posteriormente el juego fue comercializado en diversas formas, incluyendo una versión en la que los vértices estaban etiquetadas con las grandes ciudades del mundo.

2.1.2. Descripción del juego

Como ya hemos dicho el juego icosiano clásico consiste en dado un dodecaedro, encontrar un camino que pase por todos los vértices una y sólo una vez y empiece y acabe en el mismo vértice. Ahora, claramente, esto equivale a buscar un camino que vaya por los vértices y sus aristas que pase por todos los vértices una y sólo una vez y empiece y acabe en dos vértices que se hallen unidos por una arista.

El juego anterior cabe ser generalizado a cualquier objeto con vértices unidos por aristas, lo cual es un grafo. De este modo, formalicemos la idea de objeto con vértices y aristas en la de grafo como sigue:

Definición 2.1. *Un grafo G es un par ordenado de conjuntos (V,A) que verifica que A es un subconjunto de $\binom{V}{2} = \{\{x,y\} \mid x,y \in V\}$.*
Además,

- *A los elementos de V se les llama vértices.*
- *A los elementos de A se les llama aristas.*
- *Dos vértices $x,y \in V$ se dicen adyacentes cuando $\{x,y\} \in A$.*

Y ahora la del camino que queremos encontrar, que se llamará ciclo hamiltoniano por razones históricas que ya son evidentes, es la siguiente:

Definición 2.2. *Un ciclo hamiltoniano en un grafo G es una sucesión de vértices*

$$v_0 v_1 \dots v_n$$

tal que

1. *Todo vértice de G aparece al menos una vez en ella.*

[15] Esto es, Hamilton no estaba más que operando con el grupo de isometrías del espacio que dejaba fijo al icosaedro.

[16] Los cuaterniones no son más que un cuerpo no conmutativo que contiene al cuerpo de los números complejos como subcuerpo y que constituye un espacio vectorial real de dimensión cuatro.

2. *Ningún vértice se repite.*
3. v_0 *y* v_n *son adyacentes.*
4. *Para cada* $i \in \{0,1,\dots n-1\}$, v_i *y* v_{i+1} *son adyacentes.*

De este modo, el juego icosiano se traduce en dado una grafo G encontrar un ciclo hamiltoniano en él, cabe indicar que este problema en general es difícil computacionalmente, y que nosotros nos limitaremos sólo a un caso particular, que es el siguiente:

Dado un hipercubo encontrar un ciclo hamiltoniano en él.

El cual está relacionado con el juego de las torres de Hanoi.

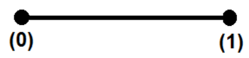
2.2. Modelo de hipercubo n-dimensional o n-cubo

Antes de mostrar y demostrar la relación existente entre las torres de Hanoi y el juego icosiano para el hipercubo, mostraremos el modelo de hipercubo que vamos a usar con el objetivo de dejar claro que significa en este caso hipercubo.

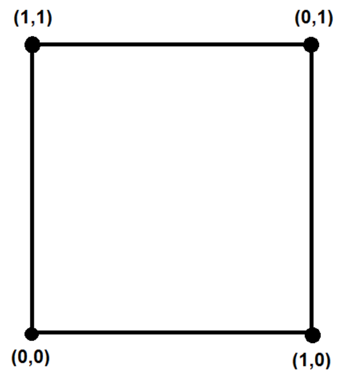
Definición 2.3. *Un n-cubo o hipercubo n-dimensional es un grafo,* HC_n*, donde* (V,A) *están dados por*

- $V = \{0,1\}^n$
- *Dados* $x,y \in V$*, entonces* $\{x,y\} \in A$ *si y sólo si x e y difieren únicamente en una componente.*

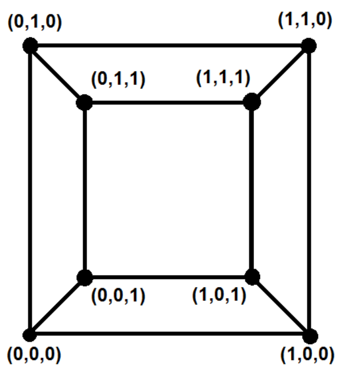
Ejemplo 2.1. *Los primeros cuatro casos,* $n \in \{1,2,3,4\}$*, que son el segmento, el cuadrado, el cubo y el teseracto o hipercubo (cuatridimensional) se pueden ver representados en el plano a continuación:*



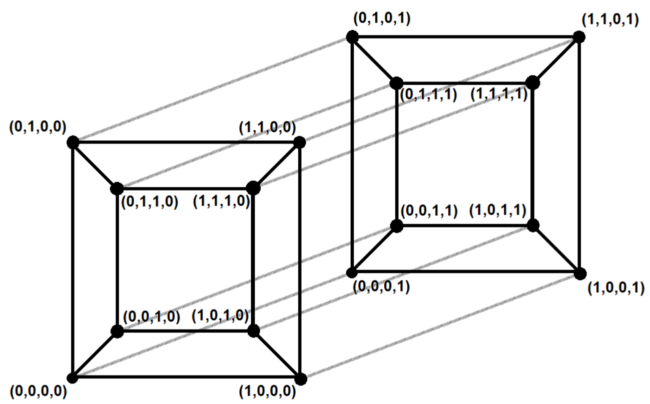
1-*cubo*



2-*cubo*



3-*cubo*



4-*cubo*

donde en el caso del cubo las aristas en la dirección vertical son las diagonales, y en el caso del teseracto las diagonales negras están en la dirección vertical y las diagonales de color grisáceo en la cuarta dirección posible en $\mathbb{R}^4$.

Como ayuda a la visualización cabe fijarse en que un 0-cubo es un punto, y a partir de ahí, que un $(n+1)$-cubo no es más que un n-cubo desplazado en una $(n+1)$-dirección de $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a todas las direcciones de $\mathbb{R}^n$ donde vive sin problemas el n-cubo, siendo las aristas la traza dejada por los vértices al moverse en esa nueva dirección.

2.3. Relación general

Una vez explicado el juego icosiano, debemos relacionarlo con el juego de las torres de Hanoi, para ello es interesante fijarse que la relación se basa en asociar a cada disco una dirección en el espacio. Y una vez hecho esto, para encontrar el ciclo hamiltoniano en el hipercubo sólo hay que moverse en esa dirección cada vez que movamos el disco.

Esto es, los discos nos indican las direcciones de movimiento en las que nos movemos si y sólo si el disco se mueve en el correspondiente juego de Hanoi. Haciendo precisa esta afirmación tenemos el siguiente teorema que nos relaciona ambos conceptos de forma precisa.

Teorema 2.1. *Dado el juego de las torres de Hanoi con n discos, denotemos por $\{p_i\}_{i=1}^{a_n}$ la sucesión en la que cada p_i es el número del disco que se mueve en el movimiento i-ésimo en la solución óptima. Entonces, un ciclo Hamiltoniano en el n-cubo viene dada por la sucesión de vértices*

$$v_0 \dots v_{a_n}$$

definida inductivamente por

1. $v_0 = (0,\dots,0)$
2. *Para cada $i > 1$, v_i es v_{i-1} con la coordenada p_i-ésima cambiada, esto es, si es un uno cambia a cero y viceversa.*

Ejemplo 2.2. *Para ilustrar el teorema pondremos los ejemplos de los casos $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$, donde para este último usamos la representación usual en dos dimensiones.*[17]

En el caso $n = 1$, el 1-cubo no es más que un segmento y la torre de Hanoi consta sólo de un disco, por lo que su sucesión de discos movidos es

$$1$$

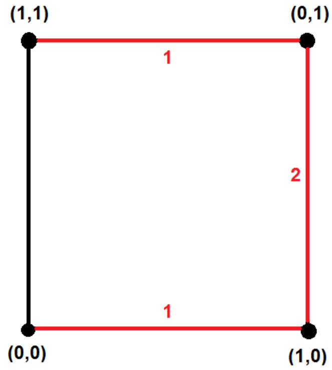
En el cual al aplicar la correspondencia anterior, sólo nos movemos una vez y en la única dirección posible, obteniendo

En el caso $n = 2$, el 2-cubo no es más que un cuadrado y el juego de las torres de Hanoi con dos discos tiene secuencia

$$1,2,1$$

La cual al movernos en las direcciones 1, después la 2 y finalmente la 1 nos da el dseado ciclo hamiltoniano en el cuadrado como se muestra a continuación:

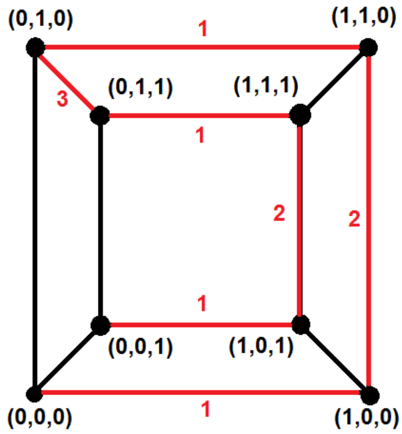
[17]Dado que la representación en cuatro dimensiones no es posible.



En el caso $n = 3$, el 3-cubo es un cubo. Ahora, para una torre de tres discos la secuencia de piezas movidas toma la forma

$$1, 2, 1, 3, 1, 2, 1$$

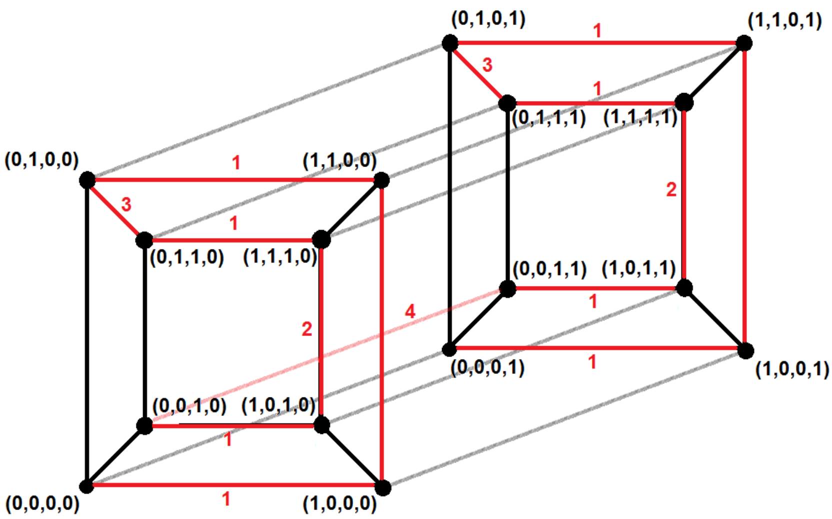
La cual al movernos en esas direcciones en el cubo, nos da el ciclo hamiltoniano deseado como podemos ver a continuación:



En el caso $n = 4$, el 4-cubo es un teseracto o hipercubo (de cuatro dimensiones) y como para una torre de cuatro discos la secuencia de piezas movidas toma la forma

$$1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1$$

Se obtiene el siguiente ciclo hamiltoniano en el 4-cubo



al aplicar la correspondencia del teorema.

Demostración. Procedamos por inducción, para $n = 1$ el teorema es cierto como ya se ha mostrado en el teorema.[18] Así, supongamos como hipótesis inductiva que es cierto para un $N \geq 1$, y probemos que entonces lo es para $N+1$.[19] Ahora, por el lema 1.6 tenemos que la sucesión de discos movidos verifica

$$s_{N+1} = s_N, N+1, s_N.$$

De esta forma, sea

$$v_0 \dots v_{b_N}$$

el ciclo hamiltoniano en el N-cubo asociado a s_N por la hipótesis inductiva[20]; aplicando la correspondencia dada en el teorema se ve que para el $(N+1)$-cubo obtenemos

$$(v_0, 0) \dots (v_{b_N}, 0)(v_{b_N}, 1) \dots (v_0, 1)$$

dado que inicialmente obtenemos el resultado de considerar s_N, para después alterar la última componente al aparecer $N+1$ y por último revertir todos los cambios en las N primeras componentes al darse que S_N es simétrica por el lema 1.6 y no aparecer en ella $N+1$.

Finalmente, sólo nos queda ver que efectivamente $(v_0, 0)$ y $(v_0, 1)$ son adyacentes, pero ello es inmediato dado que se diferencian sólo en una componente, la última. De esta forma, tenemos un ciclo hamiltoniano en el $(N+1)$-cubo a partir de la solución del juego de las torres de Hanoi con $N+1$ discos.

Por último, el principio de inducción nos da la validez del toerema para cada $n \in \mathbb{N}_1$. La demostración ha concluido. □

Finalmente, y para concluir, veamos como lo anterior se aplica para dar una demostración alternativa del teorema 1.3.

Demostración alternativa del teorema 1.3. Dada la solución óptima del juego con n torres, por el teorema 2.1, tenemos un ciclo hamiltoniano asociado en el n-cubo

$$v_0, v_1 \dots v_{b_n}$$

donde la transición de v_{i-1} a v_i se realiza modificando la componente correspondiente a la pieza que se mueve en el i-ésimo movimiento para $i \in \{1, \dots, b_n\}$.

Ahora, por un lado dado que el n-cubo tiene 2^n vértices, en virtud de que su conjnto de vértices es $\{0, 1\}^n$, y todos los vértices aparecen una y sólo una vez en el ciclo hamiltoniano, se da que

$$b_n = 2^n.$$

Y por otro lado, dado que por cada v_i, v_{i+1} hay un movimiento del algoritmo óptimo por lo ya dicho, se obtiene que necesariamente hay

$$b_n - 1 = 2^n - 1$$

movimientos en nuestro algoritmo óptimo dado en el teorema 1.1. □

[18] Formalmente también se verifica para $n = 0$, pero ese caso no es interesante para comenzar la inducción en él.

[19] Como se verá esta prueba tiene similitudes con la del teorema 1.7.

[20] Siendo b_N la longitud de dicho ciclo.

3. Bibliografía

Referencias

Libros

[1] É. Lucas. *Récréations mathématiques*. Tome III. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1979. Págs. 55-59

[2] M. Gardner. *Hexaflexagons and other mathematical diversions*. The University of Chicago Press, 1959. Págs. 55-62

[3] É.L. Spitznagel. *Selected Topics in Mathematics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971. Págs. 137-142

Artículos

[4] M.C. Er. A Representation Approach to the Tower of Hanoi Problem. *The Computer Journal* **Vol. 25**, **No. 4**. 1982. 442-447.

Páginas WEB

[5] Time Line of the Universe. Five Year Results on the Oldest Light in the Universe. *WMAP News.* **NASA** `http://map.gsfc.nasa.gov/news/5yr_release.html`

[6] The MacTutor History of Mathematics archive `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

[7] Wikipedia, The Free Encyclopedia. `http://www.wikipedia.org/`

Imágenes

[8] `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elucas_1.png`

[9] `http://en.wikipedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_portrait_oval_combined.png`